* ZADANIA 1

1.Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$. Wykazać, że jeżeli $xy \geq 0$, to $|x|+|y| \leq |x+y|+|y-z|$.

2.Rozwiązać nierówność: $|2-2^{-x}-x^2| < |1-2^{-x}|+|1-x^2|$

3.Znaleźć część całkowitą liczby $\sum_{k=1}^{2010} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

4.Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x takie, że $\{x\}$, 1 , $[x]$, tworzą ciąg geometryczny (gdzie $[x]$, $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i ułamkową liczby rzeczywistej).

5.Rozwiązać równanie $\log(x+[x]) = \log\{x\}$.

6.Wykazać, że $\log_2 3 + \log_3 4 > 2\sqrt{2}$.

7.Wykazać, że $\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\ldots+\sqrt[2008]{2008}}}} < 2$.

8.Wykazać, że jeżeli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją różnowartościową, która spełnia warunek:

$$\forall (x \in \mathbb{Q}) \quad f(x) = x+1$$

to $f(\sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}$.

9.Wykazać, że z nieskończonego ciągu (2^n) , $n \in \mathbb{N}$, nie można wybrać trzech wyrazów tworzących ciąg arytmetyczny.

10.Obliczyć granice ciągów:

(a) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)$,

(b) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}\right)$,

(c) $\left(\sqrt{n^2+2} \cdot \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)$,

(d) $\left(\prod_{k=1}^{n} \left(\sqrt{2} - \sqrt[2k+1]{2}\right)\right)$

(e) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $3a_{n+2} = 1 + a_{n+1} + a_n^3$, $n \in \mathbb{N}$.

11.Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich, taki, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$4a_n^3 \geq 1 + 3a_{n+1}^4 \ .$$

Czy (a_n) jest ciągiem zbieżnym? W przypadku zbieżności oblicz granicę tego ciągu.

12.Dla jakich wartości parametru $m > 0$ ciąg

$$a_1 = \frac{1}{2}m \ , \ 2a_{n+2} = m + a_n^2 \ , \ n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny? W przypadku zbieżności oblicz granicę tego ciągu.