Zadania z badań operacyjnych – lista 1

1. (*Zagadnienie diety*) Dziecko potrzebuje tygodniowo co najmniej 120 jednostek witaminy A, 60 jednostek witaminy D, 36 jednostek witaminy C oraz 180 jednostek witaminy E. Witaminy te są zawarte w dwóch produktach P_1 i P_2.Ponieważ nadmiar witaminy A może dziecku zaszkodzić, należy dostarczyć jej w ilości co najwyżej 240 jednostek. Zawartości witamin w jednostce produktu oraz ceny produktów podane są w poniższej tabeli.

	zaw. wit. w j. p.	
witaminy	P_1	P_2
A	6	3
D	1	3
C	9	1
E	6	6
cena	12	18

Należy zakupić produkty P_1 i P_2 w ilościach zapewniających tygodniowe zapotrzebowanie na witaminy, dla których koszt zakupu jest najmniejszy. Przedstawić powyższy problem jako zadanie programowania liniowego. Przedstawić geometrycznie zbiór rozwiązań dopuszczalnych oraz poziomice funkcji celu oraz wyznaczyć geometrycznie rozwiązanie optymalne.

2. Przy produkcji towarów P_1 i P_2 (liczonych w sztukach) wykorzystuje się aluminium i miedź. W obróbce elementów wykorzystuje się frezarki i tokarki (patrz tabela):

zasoby	wielkość	zużycie na 1 szt. produktu	
		P_1	P_2
aluminium (kg)	570	10	70
miedź (kg)	420	20	50
tokarki (roboczogodziny)	5600	300	400
frezarki (roboczogodziny)	3400	200	100
zysk (zł/szt)		300	800

Określić wielkość produkcji towarów P_1i P_2 maksymalizującą zysk. Przedstawić powyższy problem jako zadanie programowania liniowego. Przedstawić geometrycznie zbiór rozwiązań dopuszczalnych oraz poziomice funkcji celu oraz wyznaczyć geometrycznie rozwiązanie optymalne.

3. Huta potrzebuje do swojej produkcji węgla z zawartością fosforu nie większą niż $0,03\%$ i zawartością siarki nie większą niż $0,3\%$. Na rynku dostępne są trzy gatunki węgla w cenach $90, 90, 135$ (zł za tonę) o zawartościach fosforu odpowiednio $0,06\%, 0,04\%$ i $0,02\%$ i siarki – $0,2\%, 0,4\%$ i $0,3\%$. Trzy gatunki wegla należy zmieszać tak, aby otrzymać najniższą cenę i nie przekroczyć dopuszczalnych zawartości fosforu i siarki. Przedstawić powyższy problem jako zadanie programowania liniowego.

4. Z bel papieru (półfabrykaty) o szerokości 210 cm należy wyprodukować co najmniej 30 rolek o szerokości 62 cm, 60 rolek o szerokości 55 cm, 60 rolek o szerokości 40 cm. Zadaniem producenta jest zminimalizować liczbę użytych bel tak, aby były zachowane podane liczby poszczególnych produkowanych rolek. Sformułować powyższy problem jako zadanie programowania liniowego całkowitoliczbowego. **Wskazówka**: Wyznaczyć wszystkie rodzaje pocięcia beli na rolki o podanej szerokości, dla których powstała reszta jest odpadem (tzw. rozkrojów efektywnych). Co można przyjąć jako zmienne decyzyjne? Jak określić funkcję celu i ograniczenia?

5. Dwie cukrownie prowadzą kampanię cukrowniczą mając za zadanie przerobić łącznie co najmniej 3200 ton buraków. Dzienny przerób pierwszej cukrowni wynosi 100, a drugiej 160 ton buraków. Wiadomo, że w trakcie kampanii cukrowniczej powstają straty zależne od czasu trwania kampanii, które można opisać funkcją $f(t_1, t_2) = 10t_1 + 15t_2$, gdzie t_1 oznacza czas (w dniach) trwania kampanii w cukrowni pierwszej, a t_2 – w drugiej cukrowni. Pierwsza cukrownia może przyjąć co najwyżej 1600 ton buraków, natomiast druga może pracować co najwyżej 20 dni.

   (a) Jak długo powinna trwać kampania cukrownicza w każdej z cukrowni, aby straty były najniższe?

   (b) W jaki sposób optymalnie rozdzielić owe 3200 ton buraków między cukrownie?

   Sformułować powyższe zadania jako zadania programowania matematycznego.

6. Tartak otrzymał zamówienie na wykonanie co najmniej 300 kompletów belek. Każdy komplet składa się z 7 belek o długości $0,7$ m oraz 4 belek o długości $2,5$ m. Należy zrealizować zamówienie tak, aby odpad powstały w wyniku cięcia dłużyc o długości $5,2$ m był minimalny. Sformułować powyższy problem jako zadanie programowania liniowego całkowitoliczbowego.

7. W zakładzie z wielozmianową organizacją pracy istnieje następujące minimalne zapotrzebowanie na pracowników: w godzinach $0^{00} - 4^{00}$ 3 osoby, w godzinach $4^{00} - 8^{00}$ 8 osób, w godzinach $8^{00} - 12^{00}$ 10 osób, w godzinach $12^{00} - 16^{00}$ 8 osób, w godzinach $16^{00} - 20^{00}$ 14 osób, w godzinach $20^{00} - 24^{00}$ 5 osób. Praca dla pojedynczego pracownika rozpoczyna się o $0^{00}, 4^{00}, 8^{00}, 12^{00}, 16^{00}, 20^{00}$ i trwa 8 godzin. Sformułować zadanie programowania liniowego całkowitoliczbowego polegające na minimalizacji ogólnej liczby pracowników w zakładzie przy zadanych ograniczeniach. **Wskazówka**: Zastanowić się, co przyjąć jako zmienne decyzyjne w tym problemie? Jak określić funkcję celu i ograniczenia?

8. Towarzystwo lotnicze posiada n typów samolotów, które obsługują m tras. Znane są następujące wielkości :

   - p_j – cena przelotu jednej osoby na j-tej trasie,
   - k_{ij} – koszty przelotu samolotu typu i na j-tej trasie,
   - a_i – liczba posiadanych samolotów typu i,
   - c_{ij} – dopuszczalna liczba pasażerów w samolocie typu i na j-tej trasie,
   - q_j – spodziewana liczba pasażerów na j-tej trasie.

   Sformułować zadanie programowania liniowego całkowitoliczbowego polegającego na ułożeniu planu przelotów, przy którym przy zadanych ograniczeniach zysk towarzystwa lotniczego jest maksymalny. **Wskazówka**: Jako zmienne decyzyjne przyjąć liczby samolotów poszczególnych typów przeznaczonych do obsługi poszczególnych tras. Aby to zadanie sformułować jako ZPL należy wprowadzić jednak pewne pomocnicze zmienne wyrażające liczby faktycznie przewożonych pasażerów na poszczególnych trasach.

9. (*Optymalny koszyk towarów*) Konsument dysponuje gotówką w wysokości 100 zł i może za nią nabyć dwa towary P_1 (chleb) i P_2 (mleko), na które obowiązują ceny, odpowiednio, $1,50$ zł/kg i 2 zł/l . Konsumentowi przypisana jest funkcja użyteczności $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, przy czym $u(x, y) = xy$ oznacza stopień jego zadowolenia wynikający z nabycia x kg chleba i y l mleka. Celem konsumenta jest zakup (w ramach jego możliwości finansowych) takich ilości chleba i mleka, dla których użyteczność jest największa. Przedstawić opisane zadanie jako problem programowania matematycznego i rozwiązać go graficznie. Jak zmieni się rozwiązanie, gdy funkcja użyteczności przybierze postać $u(x, y) = \min\{x, y\}$.

10. (*Optymalny portfel akcji)* Inwestor ma zamiar utworzyć portfel złożony z dwóch akcji A_1 i A_2, mających odpowiednio średnie stopy zwrotu $R_1 = 0,1$ i $R_2 = 0,2$ oraz ryzyko $s_1 = 0,1$ i $s_2 = 0,3$. Korelacja między tymi akcjami wynosi $\rho_{12} = -0,5$. Funkcja użyteczności inwestora ma postać $u(s, R) = -s + 2R$. Inwestor powinien utworzyć portfel maksymalizujący funkcję użyteczności. Sformułować powyższy problem w postaci zadania minimalizacji z ograniczeniami. Wykonać odpowiedni rysunek przedstawiający zbiór rozwiązań dopuszczalnych i poziomice funkcji celu oraz wyznaczyć geometrycznie rozwiązanie optymalne.