Zadania z badań operacyjnych – lista 2

1. Niech A_i będzie macierzą typu $m \times n_i, i = 1, ..., m$, zaś B_i – macierzą typu $n_i \times p, i = 1, ..., m$. Pokazać, że

$$\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} A_i B_i,$$

czyli zasada mnożenia blokowego macierzy jest taka sama jak reguła "zwykłego" mnożenia macierzy.

2. Niech A będzie macierzą typu $m \times n$, $x = (x_1, ..., x_n)^\top$ oraz $y = (y_1, ...y_m)^\top$. Pokazać, że Ax jest kombinacją liniową kolumn macierzy A o współczynnikach $x_1, ..., x_n$ oraz $y^\top A$ – kombinacją liniową wierszy macierzy A o współczynnikach $y_1, ..., y_m$.

3. Niech A będzie macierzą typu $m \times n$. Pokazać, że $Ae_j = A_j$ i $e_i^\top A = A^i$, gdzie e_k oznacza k-ty wersor przestrzeni euklidesowej odpowiedniego wymiaru, A_j oznacza j-tą kolumnę macierzy A, zaś A^i – i-ty wiersz tej macierzy.

4. Niech A będzie macierzą typu $m \times n$. Pokazać, że macierz $A^\top A$ jest nieujemnie określona i że jest ona dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy A jest pełnego rzędu kolumnowego.

5. Dany jest jednorodny układ m równań liniowych z n niewiadomymi $Ax = 0$.
   (a) Pokazać, że zbiór rozwiązań tego układu jest podprzestrzenią liniową.
   (b) Przypuśćmy, że pierwsze m kolumn macierzy A jest liniowo niezależnych. Oznaczmy symbolem A_B podmacierz utworzoną z tych kolumn, zaś symbolem A_N macierz utworzoną z pozostałych $n - m$ kolumn. Przedstawić postać dowolnego rozwiązania tego układu.
   (c) Jaka jest baza i wymiar omawianej podprzestrzeni liniowej?

6. Dany jest niesprzeczny układ m równań liniowych $Ax = b$.
   (a) Wyjaśnić, dlaczego bez szkody dla ogólności rozważań można założyć, że macierz A ma pełny rząd wierszowy, czyli że $\mathrm{r}(A) = m$.
   (b) Pokazać, że zbiór rozwiązań tego układu jest podprzestrzenią afiniczną, czyli że

   jeśli x, y są rozwiązaniami układu $Ax = b$ i $\lambda \in \mathbb{R}$,
   to $(1 - \lambda)x + \lambda y$ też jest rozwiązaniem tego układu.

   (c) Przedstawić postać dowolnego rozwiązania tego układu.

7. Rozwiązać poniższe układy równań metodą eliminacji Gaussa:

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$, (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$, (c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$,

(d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$, (e) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$, (f) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$,

(g) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

8. Dane są wektory $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $c_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ oraz macierze A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} odpowiednich typów i następujące ZPL:

$$\begin{aligned} \text{maksymalizować} \quad & c_1^\top x_1 + c_2^\top x_2 \\ \text{względem} \quad & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \\ & A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \leq b_2 \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Przedstawić to zadanie w postaci klasycznej i standardowej.

9. Przedstawić poniższe zadania jako zadania programowania liniowego:

(a) (zadanie dopuszczalności liniowej)

$$\text{wyznaczyć rozwiązanie układu nierówności liniowych } a_i^\intercal x \leq b_i, i = 1, ..., m,$$
$$\text{gdzie } a_i = (a_{i1}, ..., a_{in})^\intercal \in \mathbb{R}^n, i = 1, ..., m, x = (x_1, ..., x_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n.$$

(b) (zadanie minimalizacji nieróżniczkowalnej)

$$\text{minimalizować } f(x) = \max\{\ a_i^\intercal x - b_i, i = 1, ..., m\},$$
$$\text{względem } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wskazówka: wprowadzić zmienną pomocniczą u i zauważyć, że $f(x) \leq u$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_i(x) := a_i^\intercal x - b_i \leq u$ dla $i = 1, ..., m$.

(c)

$$\text{minimalizować } f(x) = \sum_{i=1}^m |a_i^\intercal x - b_1|\,,$$
$$\text{względem } x \in \mathbb{R}^n.$$