Zadania z badań operacyjnych – lista 5

1. Dane są następujące tablice sympleksowe:

A

1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	
5	-1	-2	-3	z
2	1	3	-2	u_1
0	2	5	-1	u_2
1	3	4	0	u_3

B

1	$-u_1$	$-x_2$	$-x_3$	
3	2	-5	0	z
8	-2	2	4	x_1
3	3	1	1	u_2
15	5	3	5	u_3

C

1	$-x_1$	$-u_2$	$-x_3$	
-5	2	1	4	z
3	1	-1	3	u_1
-2	1	2	0	x_2
1	0	1	-1	u_3

D

1	$-u_3$	$-u_1$	$-x_3$	
8	2	0	3	z
4	-2	-1	4	x_2
3	0	1	2	u_2
0	0	-2	1	x_1

E

1	$-u_1$	$-x_2$	$-u_2$	
8	2	0	1	z
1	1	-2	1	x_1
0	2	2	2	x_3
3	1	-1	3	u_3

F

1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	
0	6	12	8	z
-4	-2	-2	0	u_1
1	1	2	2	u_2
-8	-1	3	-4	u_3

(a) W tablicy B wskazać element główny według reguł II fazy algorytmu sympleksowego, dokonać piwotyzacji i przedstawić kolejną tablicę sympleksową:

B^+ :

(b) W tablicy F wskazać element główny według reguł dualnego algorytmu sympleksowego.

(c) Wypełnić natępującą tabelę:

Tablica: $\longrightarrow$	A		B		C		D		E		F	
$\downarrow$	tak	nie	tak	nie	tak	nie	tak	nie	tak	nie	tak	nie
wskazuje, że brak jest rozwiązań dopuszczalnych	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
przedstawia bazowe rozwiązanie dopuszczalne	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
przedstawia rozwiązanie bazowe pierwotnie zdegenerowane	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
przedstawia rozwiązanie bazowe dualnie zdegenerowane	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
przedstawia bazowe rozwiązanie optymalne	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
wskazuje, że jest więcej rozwiązań optymalnych	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
wskazuje, że jest brak rozwiązań optymalnych	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
wskazuje, że zbiór rozwiązań optymalnych jest nieograniczony	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
W przypadku, gdy tablica przedstawia rozwiązanie optymalne, podać:	× × ××		× × ××		× × ××		× × ××		× × ××		× × ××	
rozwiązanie optymalne problemu pierwotnego $x^* =$												
rozwiązanie optymalne problemu dualnego $y^* =$												

2. Rozwiązać przy pomocy dualnej metody sympleksowej zadanie 4. z listy 1.

3. Niech A bedzie macierzą typu $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Sprawdzić, czy poniższe zadania programowania liniowego sa wzajemnie dualne

(a)

$$\begin{array}{rr} \text{maksymalizować} & c^\top x \\ \text{przy ograniczeniach} & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{P1}$$

i

$$\begin{array}{rr} \text{minimalizować} & b^\top y \\ \text{przy ograniczeniach} & A^\top y \geq c \\ & y \geq 0. \end{array} \tag{D1}$$

(b)

$$\begin{array}{rr} \text{maksymalizować} & c^\top x \\ \text{przy ograniczeniach} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{P2}$$

i

$$\begin{array}{rr} \text{minimalizować} & b^\top y \\ \text{przy ograniczeniach} & A^\top y \geq c \end{array} \tag{D2}$$

(c)

$$\begin{array}{rr} \text{maksymalizować} & c_1^\top x_1 + c_2^\top x_2 \\ \text{względem} & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \\ \text{przy ograniczeniach} & A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \\ & A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \leq b_2 \\ & x_1 \geq 0 \end{array} \tag{P3}$$

i

$$\begin{array}{rr} \text{minimalizować} & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{względem} & (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \\ \text{przy ograniczeniach} & A_{11}^\top y_1 + A_{21}^\top y_2 \geq c_1 \\ & A_{12}^\top y_2 + A_{22}^\top y_2 = c_2 \\ & y_2 \geq 0, \end{array} \tag{D3}$$

gdzie macierz blokowa

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

jest typu $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$, wektory $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, c_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

4. Korzystając z twierdzenia o komplementarności (tw. 4.2.13 ze skryptu *Programowanie liniowe*) pokazać, że zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Niech x i y będą rozwiązaniami dopuszczalnymi odpowiednio dla zadania pierwotnego* (P2) *i dualnego* (D2). *Wówczas x i y są rozwiązaniami optymalnymi wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$x^\top (c - A^\top y) = 0.$$

5. Dane jest zadanie programowania liniowego

$$\begin{array}{rr} \text{minimalizować} & 3x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ & x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Wiadomo, że $x^* = (0, 6, 0, 4)$ jest rozwiązaniem tego zadania. Wyznaczyć rozwiązanie zadania dualnego korzystając z twierdzenia o komplementarności podanego w zadaniu 4.

6. Korzystając z twierdzeń o dualności sprowadzić ZPL do wyznaczeniu rozwiązaniu pewnego układu nierówności liniowych.