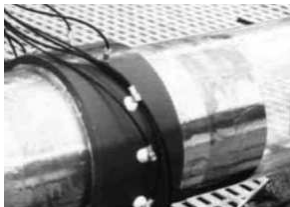


**Zdecentralizowane
harmonogramowanie aktywacji
czujników w estymacji parametrów
układów z czasoprzestrzenną
dynamiką**

Maciej Patan

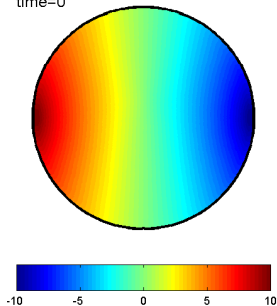
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski
e-mail: `M.Patan@issi.uz.zgora.pl`

Przykład: Tomografia impedancyjna

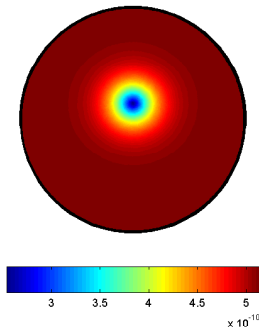


electrical potential

time=0



conductivity map



Cd. przykładu: Kalibracja modelu

Niech $y(x, t)$ – potencjał elektryczny w punkcie x i czasie t .

Matematyczny model zmian potencjału stanowi **równanie różniczkowe cząstkowe**

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \nabla y) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in T,$$

gdzie σ – współczynnik konduktywności, oraz warunki początkowy:

$$y = 0$$

i brzegowe:

$$y = \pm 10, \quad \text{dla elektrod zasilających} \quad (\text{warunki Dirichleta})$$

$$y = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \text{w pozostałych punktach} \quad (\text{warunki von Neumanna})$$

Cd. przykładu: Kalibracja modelu

Niech $y(x, t)$ – potencjał elektryczny w punkcie x i czasie t .

Matematyczny model zmian potencjału stanowi **równanie różniczkowe cząstkowe**

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \nabla y) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in T,$$

gdzie σ – współczynnik konduktywności, oraz warunki początkowy:

$$y = 0$$

i brzegowe:

$y = \pm 10$, dla elektrod zasilających (warunki Dirichleta)

$y = \frac{\partial y}{\partial n}$, w pozostałych punktach (warunki von Neumanna)

Strategia obserwacji

Jak przestrzennie rozmieścić elektrody pomiarowe, żeby zrekonstruować nieznaną mapę σ możliwie najdokładniej?

Wyzwania w rozproszonym procesie obserwacji

- dokładna estymacja parametrów,
- efektywna predykcja zachowania systemu,
- rozproszone sterowanie,
- synteza i dystrybucja informacji: podejście scentralizowane vs. rozproszone.

Identyfikacja układów o parametrach rozłożonych

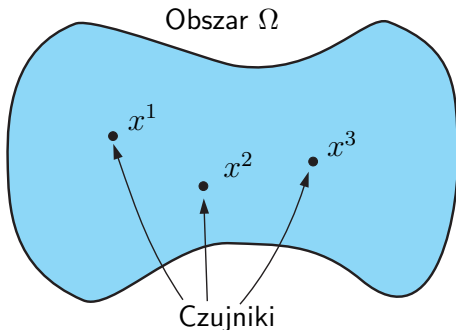
Wyzwania w rozproszonym procesie obserwacji

- dokładna estymacja parametrów,
- efektywna predykcja zachowania systemu,
- rozproszone sterowanie,
- synteza i dystrybucja informacji: podejście scentralizowane vs. rozproszone.

Dlaczego rozwiązanie jest tak trudne?

W **układach o parametrach rozłożonych**, dynamika zmienia się zarówno względem czasu jak też zmiennych przestrzennych; zazwyczaj jest opisywana przez **równania różniczkowe cząstkowe** i najczęściej analiza problemów modelowania i sterowania wymagana jest w zakresie określonego obszaru przestrzennego.

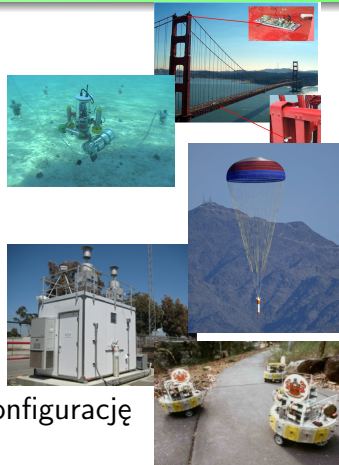
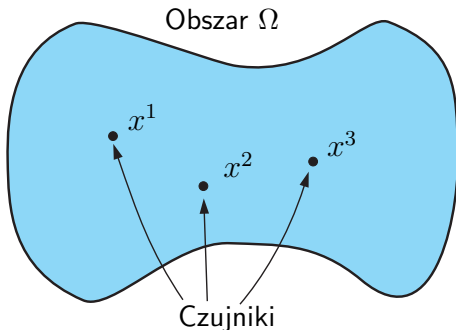
Zakres problemowy referatu



Problem: Jak wyznaczyć „najlepszą” konfigurację sieci sensorycznej:

- 1 wysoką jakość identyfikacji obserwowanego układu,

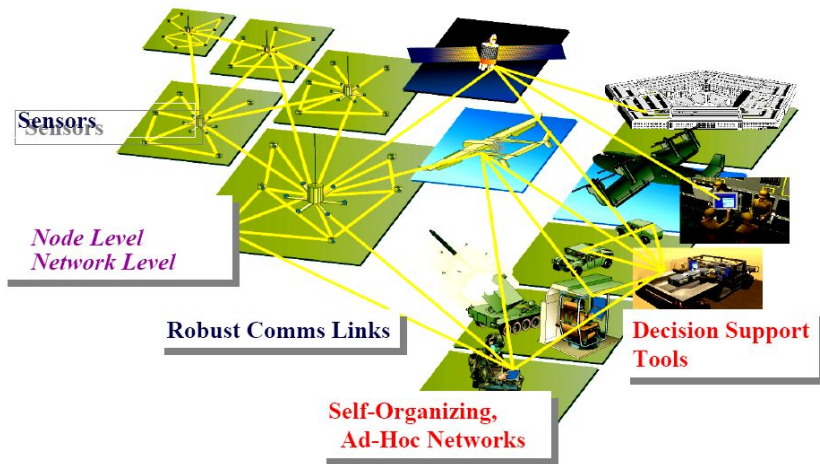
Zakres problemowy referatu



Problem: Jak wyznaczyć „najlepszą” konfigurację sieci sensorycznej:

- 1 wysoką jakość identyfikacji obserwowanego układu,
- 2 w sposób zdecentralizowany zapewniający „odporność” na awarie węzłów.

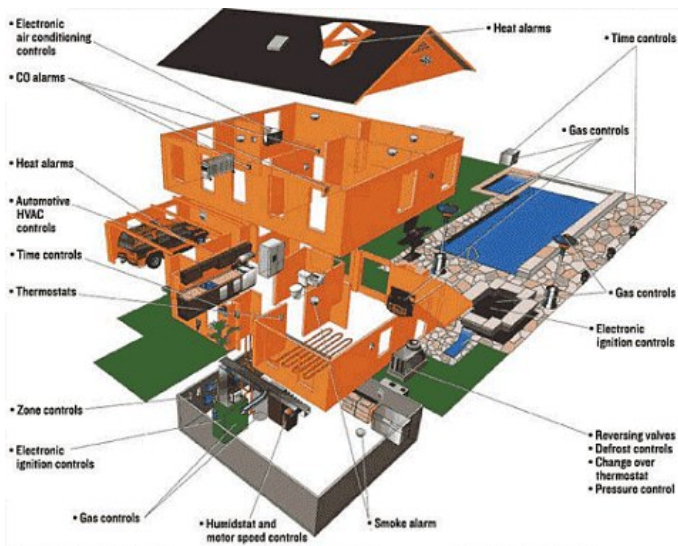
Zastosowania: pole bitwy



Zastosowania: monitoring zanieczyszczeń



Zastosowania: budynki inteligentne

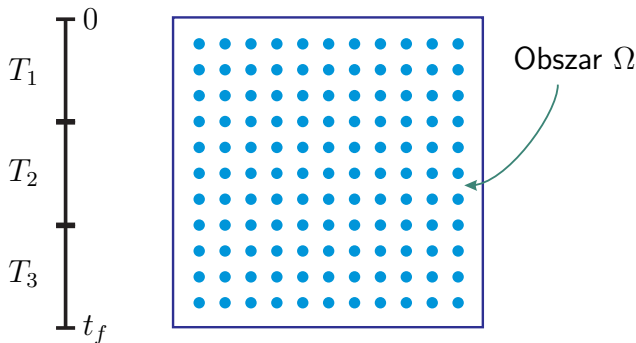


...i wiele innych

- obserwacje środowiskowe i systemy prognozowania
 - monitoring zasobów wód podziemnych i rzek,
 - zastosowania wojskowe: nadzór i eksploracja w środowiskach skażonych,
- systemy przewodnictwa cieplnego,
- kontrola reakcji chemicznych,
- kontrola jakości produktów,
- detekcja i lokalizacja uszkodzeń w procesach czasoprzestrzennych,
- materiały inteligentne,
- monitoring habitatów,
- tomografia komputerowa,
- wydobywanie minerałów i węglowodorów z podziemnych złóż,

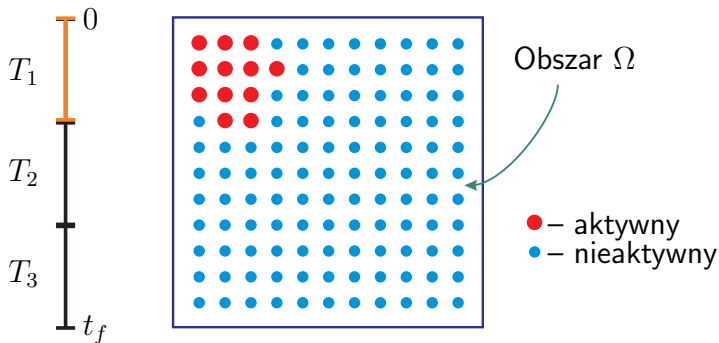
Skanująca sieć sensoryczna

Dla danych N węzłów, których położenia są ustalone *a priori*, oraz przedziału obserwacji $T = (0, t_f)$ podzielonego na podprzedziały T_k , $k = 1, \dots, K$ aktywujemy odpowiedni n_k -elementowy podzbiór sensorów dla każdego T_k .



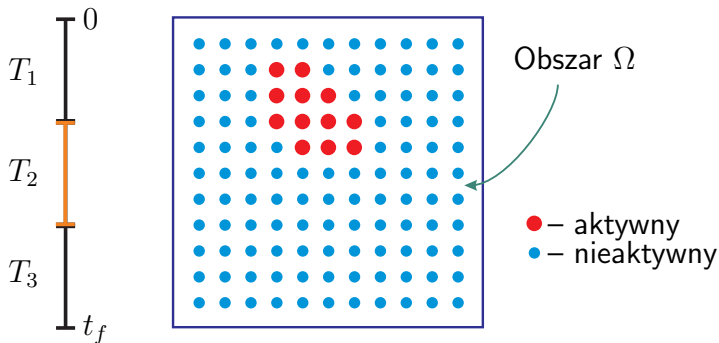
Skanująca sieć sensoryczna

Dla danych N węzłów, których położenia są ustalone *a priori*, oraz przedziału obserwacji $T = (0, t_f)$ podzielonego na podprzedziały T_k , $k = 1, \dots, K$ aktywujemy odpowiedni n_k -elementowy podzbiór sensorów dla każdego T_k .



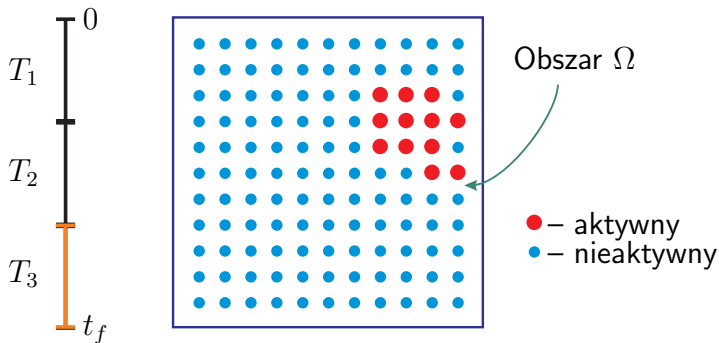
Skanująca sieć sensoryczna

Dla danych N węzłów, których położenia są ustalone *a priori*, oraz przedziału obserwacji $T = (0, t_f)$ podzielonego na podprzedziały T_k , $k = 1, \dots, K$ aktywujemy odpowiedni n_k -elementowy podzbiór sensorów dla każdego T_k .



Skanująca sieć sensoryczna

Dla danych N węzłów, których położenia są ustalone *a priori*, oraz przedziału obserwacji $T = (0, t_f)$ podzielonego na podprzedziały T_k , $k = 1, \dots, K$ aktywujemy odpowiedni n_k -elementowy podzbiór sensorów dla każdego T_k .



Zalety i wady

Powodem do nie używania wszystkich dostępnych sensorów jest redukcja złożoności całego systemu jak też ograniczenie kosztów operacji i zużycia energii.

- ▶ Alternatywna interpretacja: kilka czujników ruchomych.
- ▶ Czujniki mogą śledzić miejsca, w których pomiary dostarczą możliwie najlepszej wiedzy o dynamice układu czasoprzestrzennego.
- ▶ Szybki postęp technologiczny umożliwia tanią realizację.

Zalety i wady

Powodem do nie używania wszystkich dostępnych sensorów jest redukcja złożoności całego systemu jak też ograniczenie kosztów operacji i zużycia energii.

- ▶ Alternatywna interpretacja: kilka czujników ruchomych.
- ▶ Czujniki mogą śledzić miejsca, w których pomiary dostarczą możliwie najlepszej wiedzy o dynamice układu czasoprzestrzennego.
- ▶ Szybki postęp technologiczny umożliwia tanią realizację.

ale:

- ▶ Kombinatoryczny charakter problemu wyklucza naiwne (trywialne) podejścia.

Model układu

Rozważmy obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathcal{F} \left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \theta \right), \quad x \in \Omega, \quad t \in T$$

$$\mathcal{B} \left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \theta \right) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times T,$$

$$\mathcal{I} \left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \theta \right) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \{0\},$$

Notacja:

- ▶ x – zmienna przestrzenna, t – czas, $T = [0, t_f]$;
- ▶ $y = y(x, t)$ – wektor stanu;
- ▶ $\mathcal{F}, \mathcal{B}, \mathcal{I}$ – znane funkcje;
- ▶ $\theta \in \mathbb{R}^m$ – wektor *nieznanych* (stałych) parametrów.

Dla czujników skanujących mamy

$$z^j(t) = y(x_k^j, t; \theta), t) + \varepsilon^j(t), \\ t \in T_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, n_k,$$

Notacja:

- $z^j(\cdot)$ — pomiar,
- $x_k^j \in X$ — pozycja j -tego węzła na przedziale T_k ,
- X — zbiór dopuszczalnych pozycji węzłów,
- $\varepsilon(\cdot)$ — nieskorelowany gaussowski proces losowy, i.e.

$$\mathbb{E}[\varepsilon^j(t)] = 0, \quad \text{var}(\varepsilon^j(t)) = \sigma^2.$$

Kryterium najmniejszych kwadratów

Estymata NK wektora θ minimalizuje

$$\mathcal{J}(\vartheta) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{n_k} \int_{T_k} \left\{ z_m^\ell(t) - y(x_k^j, t; \vartheta) \right\}^2 dt$$

gdzie $\hat{y}(\cdot; \theta)$ oznacza rozwiązanie równania stanu dla danej wartości θ .

Kryterium najmniejszych kwadratów

Estymata NK wektora θ minimalizuje

$$\mathcal{J}(\vartheta) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{n_k} \int_{T_k} \left\{ z_m^\ell(t) - y(x_k^j, t; \vartheta) \right\}^2 dt$$

gdzie $\hat{y}(\cdot; \theta)$ oznacza rozwiązanie równania stanu dla danej wartości θ .

Problem optymalnych obserwacji

Wyznaczyć harmonogram x_k^j (pozycje węzłów aktywowanych dla każdego podprzedziału obserwacji) tak aby maksymalizować dokładność estymacji.

Kryterium najmniejszych kwadratów

Estymata NK wektora θ minimalizuje

$$\mathcal{J}(\vartheta) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{n_k} \int_{T_k} \left\{ z_m^\ell(t) - y(x_k^j, t; \vartheta) \right\}^2 dt$$

gdzie $\hat{y}(\cdot; \theta)$ oznacza rozwiązanie równania stanu dla danej wartości θ .

Problem optymalnych obserwacji

Wyznaczyć harmonogram x_k^j (pozycje węzłów aktywowanych dla każdego podprzedziału obserwacji) tak aby maksymalizować **dokładność estymacji**. ← Co to takiego?

Miara dokładności estymacji

Nierówność Craméra-Rao

$$\text{cov } \hat{\theta} = E\left\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T\right\} \succeq M^{-1}$$

Mamy $\text{cov } \hat{\theta} = M^{-1}$ jeżeli tylko estymator jest efektywny! Ale czym jest M ?

Miara dokładności estymacji

Nierówność Craméra-Rao

$$\text{cov } \hat{\theta} = E\left\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T\right\} \succeq M^{-1}$$

Mamy $\text{cov } \hat{\theta} = M^{-1}$ jeżeli tylko estymator jest efektywny! Ale czym jest M ?

Informacyjna Macierz Fishera (IMF)

$$M = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{t_f} \int_{T_k} g(x_j^\ell, t) g^T(x_j^\ell, t) dt$$

gdzie $g(x, t) = \left[\frac{\partial y(x, t; \vartheta)}{\partial \vartheta_1}, \dots, \frac{\partial y(x, t; \vartheta)}{\partial \vartheta_m} \right]_{\vartheta=\theta^0}^T$ oznacza wektor tzw. *współczynników wrażliwościowych*, a θ^0 jest wstępnym oszacowaniem θ .

Kryteria dokładności estymacji

Wyznaczyć x_k^j , $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, n_k$ które będzie ekstremalizować skalarną miarę Ψ zdefiniowaną na IMF, np.

D-optymalność

$$\Psi(M) = \det(M) \longrightarrow \max$$

Jest to równoważne minimalizacji **objętości** elipsoidy niepewności.

Kryteria dokładności estymacji

Wyznaczyć x_k^j , $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, n_k$ które będzie ekstremalizować skalarną miarę Ψ zdefiniowaną na IMF, np.

A-optymalność

$$\Psi(M) = \text{trace}(M^{-1}) \longrightarrow \min$$

Jest to równoważne minimalizacji **średniej długości pól** elipsoidy niepewności.

Kryteria dokładności estymacji

Wyznaczyć x_k^j , $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, n_k$ które będzie ekstremalizować skalarną miarę Ψ zdefiniowaną na IMF, np.

E-optymalność

$$\Psi(M) = \lambda_{\min}(M) \longrightarrow \max$$

Jest to równoważne minimalizacji **długości najdłuższej półosi** elipsoidy niepewności.

Zarys proponowanego podejścia

- Ogólne kryterium optymalności.
- Dla dużej liczby węzłów N , można złagodzić problem:

Pozycja pojedynczych czujników



Przestrzenna gęstość czujników w X

Matematycznie, gęstość czujników może być identyfikowana z miarą prawdopodobieństwa $\xi_k(dx)$ na przestrzeni (X, \mathcal{B}) , gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem wszystkich borelowskich podzbiorów X .

- Warunki optymalności i efektywny algorytm.

Źródła:

- Statystyka przestrzenna i optymalne planowanie eksperymentu [Wynn, 1982; Fedorov, 1989; Sahm and Schwabe, 2001] (statyczne modeli regresji).

Zarys proponowanego podejścia

- Ogólne kryterium optymalności.
- Dla dużej liczby węzłów N , można złagodzić problem:

Pozycja pojedynczych czujników



Przestrzenna gęstość czujników w X

Matematycznie, gęstość czujników może być identyfikowana z miarą prawdopodobieństwa $\xi_k(dx)$ na przestrzeni (X, \mathcal{B}) , gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem wszystkich borelowskich podzbiorów X .

- Warunki optymalności i efektywny algorytm.

Źródła:

- Statystyka przestrzenna i optymalne planowanie eksperymentu [Wynn, 1982; Fedorov, 1989; Sahm and Schwabe, 2001] (statyczne modeli regresji).

Zarys proponowanego podejścia

- Ogólne kryterium optymalności.
- Dla dużej liczby węzłów N , można złagodzić problem:

Pozycja pojedynczych czujników



Przestrzenna gęstość czujników w X

Matematycznie, gęstość czujników może być identyfikowana z miarą prawdopodobieństwa $\xi_k(dx)$ na przestrzeni (X, \mathcal{B}) , gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem wszystkich borelowskich podzbiorów X .

- Warunki optymalności i efektywny algorytm.

Źródła:

- Statystyka przestrzenna i optymalne planowanie eksperymentu [Wynn, 1982; Fedorov, 1989; Sahm and Schwabe, 2001] (statyczne modeli regresji).

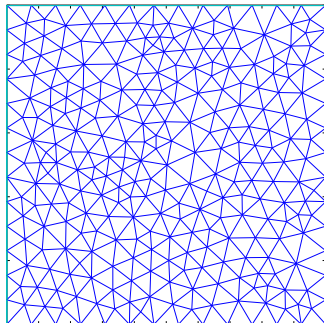
Interpretacja wynikowych rozwiązań

Dla danego ξ_k , podziel X na małe podobszary ΔX_i i przydziel do każdego z nich liczbę

$$N_k(\Delta X_i) = \left\lceil N \int_{\Delta X_i} \xi_k(dx) \right\rceil$$

aktywnych czujników w T_k ($\lceil \rho \rceil$ jest najmniejszą liczbą całkowitą $\geq \rho$).

Podzielony obszar $X \longrightarrow$



Niezbędne uzupełnienia

Dla każdego przedziału T_k Szukamy miar probabilistycznych ξ_k , $k = 1, \dots, K$ na X .

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_K)$$

nazywamy ξ **miarą planu** (lub krócej **planem**).

Niezbędne uzupełnienia

Dla każdego przedziału T_k Szukamy miar probabilistycznych ξ_k , $k = 1, \dots, K$ na X .

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_K)$$

nazywamy ξ **miarą planu** (lub krócej **planem**). Niech $\omega(dx)$ oznacza maksymalną możliwą 'liczbę' czujników na dx :

$$\xi_k(dx) \leq \omega(dx); \quad \int_X \omega(dx) \geq 1$$

Niezbędne uzupełnienia

Dla każdego przedziału T_k Szukamy miar probabilistycznych ξ_k , $k = 1, \dots, K$ na X .

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_K)$$

nazywamy ξ **miarą planu** (lub krócej **planem**). Niech $\omega(dx)$ oznacza maksymalną możliwą 'liczbę' czujników na dx :

$$\xi_k(dx) \leq \omega(dx); \quad \int_X \omega(dx) \geq 1$$

Plany dopuszczalne

Niech $\bar{\Xi}(X)$ oznacza zbiór wszystkich miar planów $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_K)$ przy ograniczeniach

$$\xi_k(\Delta X) = \begin{cases} \omega(\Delta X) & \text{dla } \Delta X \subset \text{supp } \xi_k \\ 0 & \text{dla } \Delta X \subset X \setminus \text{supp } \xi_k \end{cases}$$

Problem planowania (Ψ, ω) -optymalnego

Znaleźć $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_K) \in \bar{\Xi}(X)$ który minimalizuje $\Psi[M(\xi)]$ przy ograniczeniach

$$\xi_k(dx) \leq \omega(dx), \quad k = 1, \dots, K$$

gdzie uogólniona macierz informacyjna Fishera

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^K \int_X M_k(x) \xi_k(dx)$$

oraz

$$M_k(x) = \frac{1}{t_f} \int_{T_k} g^T(x, t) g(x, t) dt,$$

Niespodziewanie, takie abstrakcyjne sformułowanie problemu prowadzi do bardzo konkretnych wyników ...

Charakterystyka rozwiązań

Rozważmy przypadek kiedy $\omega(dx)$ ma ciągłą gęstość ϱ .

Twierdzenie

Jeżeli $\omega(dx) = \varrho(x) dx$, gdzie $\varrho(x)$ jest ciągłą funkcją dodatnią, wtedy plan (Ψ, ω) -optymalny ξ^ istnieje pod warunkiem $\xi_k^*(dx) = h_k(x) dx$ gdzie*

$$h_k(x) = \begin{cases} \varrho(x) & \text{w pewnym podobszarze } X_k^* \\ 0 & \text{w } X \setminus X_k^* \end{cases}.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym optymalności jest

$$\inf_{x \in X_k^*} \psi_k(x, \xi^*) \geq \sup_{x \in X \setminus X_k^*} \psi_k(x, \xi^*), \quad k = 1, \dots, K$$

Czym są funkcje ψ_k ?

W teorii planowania eksperymentu są one nazywane *funkcjami wrażliwościami*:

$$\psi_k(x, \xi) = \phi_k(x, \xi) - \varsigma_k(\xi)/K,$$

$$\varsigma_k(\xi) = -\text{trace} [\overset{\circ}{\Psi}[M(\xi)]M(\xi)],$$

$$\phi_k(x, \xi) = -\text{trace} [\overset{\circ}{\Psi}[M(\xi)]\Upsilon_k(x)],$$

gdzie

$$\overset{\circ}{\Psi}[M(\xi)] = \left. \frac{\partial \Psi(M)}{\partial M} \right|_{M=M(\xi)}$$

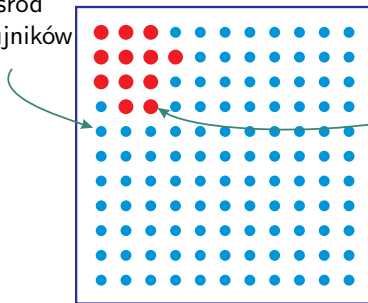
Algorytm numeryczny

Z podanego twierdzenie wynika, że najlepiej, aby punkty pomiarowe dla T_k zbiegały do maksimum $\psi_k(\cdot, \xi^*)$. Jest to podstawą prostego i efektywnego algorytmu wymiany (Uciński i Patan, 2002; Patan i Uciński, 2005) (przy założeniu odpowiednio gęstej siatki w X):

Iteracja ℓ

Największe ψ_k wśród
nieaktywnych czujników

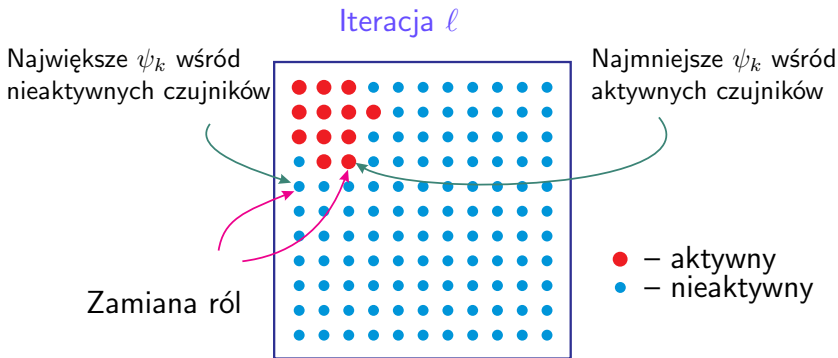
Najmniejsze ψ_k wśród
aktywnych czujników



● – aktywny
● – nieaktywny

Algorytm numeryczny

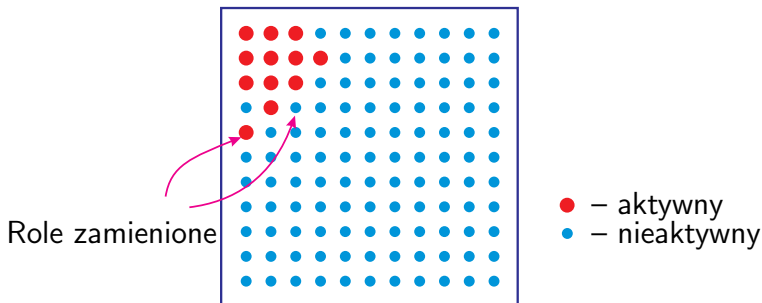
Z podanego twierdzenie wynika, że najlepiej, aby punkty pomiarowe dla T_k zbiegały do maksimum $\psi_k(\cdot, \xi^*)$. Jest to podstawą prostego i efektywnego algorytmu wymiany (Uciński i Patan, 2002; Patan i Uciński, 2005) (przy założeniu odpowiednio gęstej siatki w X):



Algorytm numeryczny

Z podanego twierdzenie wynika, że najlepiej, aby punkty pomiarowe dla T_k zbiegały do maksimów $\psi_k(\cdot, \xi^*)$. Jest to podstawą prostego i efektywnego algorytmu wymiany (Uciński i Patan, 2002; Patan i Uciński, 2005) (przy założeniu odpowiednio gęstej siatki w X):

Iteracja $\ell + 1$

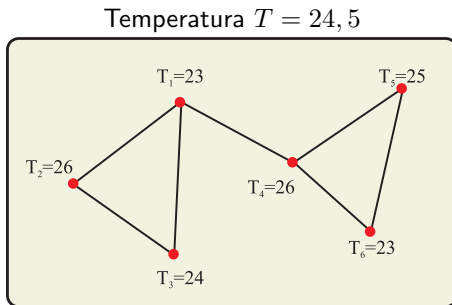


Randomizowane algorytmy plotkarskie

Charakterystyka

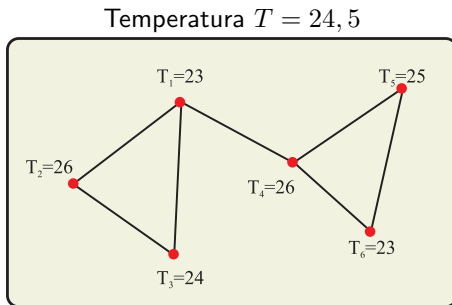
- komunikacja parami,
- iteracyjne i rozproszone,
- przetwarzanie tylko lokalnej informacji,
- losowe nawiązywanie komunikacji,
- zaprojektowane jako redundantne i nieoptymalne,
- odporne na uszkodzenia węzłów i zmiany w topologii,
- zbieżność wykładnicza,
- najczęściej spotykane w zadaniu rozproszonego uśredniania.

Przykład: Pomiar temperatury otoczenia



- sieć sensoryczna o określonej topologii do pomiaru temperatury otoczenia T ,
- odczyty czujników są zaszumione, tj. $T_i = T + \varepsilon_i$,
- nieobciążony estymator: $\hat{T} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 T_i$.

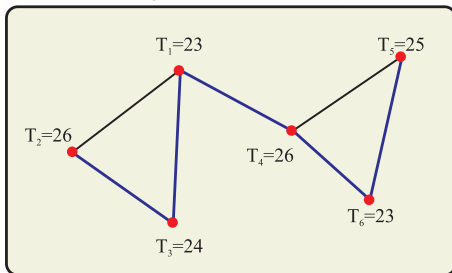
Przykład: Pomiar temperatury otoczenia



- sieć sensoryczna o określonej topologii do pomiaru temperatury otoczenia T ,
- odczyty czujników są zaszumione, tj. $T_i = T + \varepsilon_i$,
- nieobciążony estymator: $\hat{T} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 T_i$.
- **Problem:** Jak wyznaczyć średnią w sposób rozproszony?

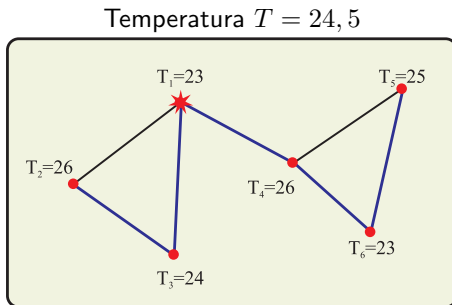
Przykład: Algorytm klasyczny

Temperatura $T = 24,5$



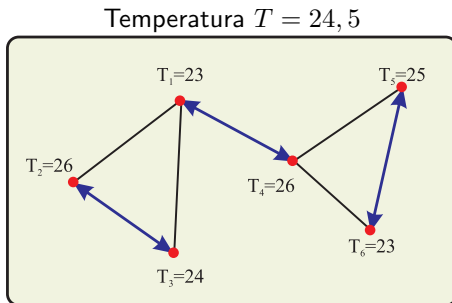
- najpierw węzły sieci tworzą w sposób rozproszony „infrastrukturę” (np. drzewo rozpinające),
- drzewo rozpinające jest używane do uporządkowanej wymiany wartości pomiarów i wyliczenia wartości średniej,
- procedura jest prosta i rozproszona, ale ...

Przykład: Algorytm klasyczny



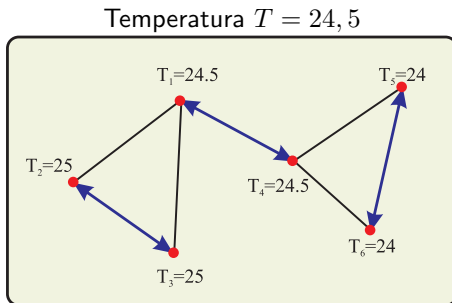
- najpierw węzły sieci tworzą w sposób rozproszony „infrastrukturę” (np. drzewo rozpinające),
- drzewo rozpinające jest używane do uporządkowanej wymiany wartości pomiarów i wyliczenia wartości średniej,
- procedura jest prosta i rozproszona, ale ...
- węzły mogą ulec awarii lub uszkodzeniu \Rightarrow rekonstrukcja infrastruktury,

Przykład: Algorytm plotkarski



- w każdej iteracji:
 - dany węzeł komunikuje się z jednym z losowo wybranych sąsiadów formując parę,
 - sparowane węzły uśredniają swoje estymaty,

Przykład: Algorytm plotkarski



- w każdej iteracji:
 - dany węzeł komunikuje się z jednym z losowo wybranych sąsiadów formując parę,
 - sparowane węzły uśredniają swoje estymaty,
- oszacowania w każdym z węzłów zbiegają do wartości średniej.

Zdecentralizowany algorytm wymiany (1)

- Zauważmy, że jedynym nielokalnym komponentem niezbędnym do wyznaczenia funkcji ψ_k w każdym węźle sieci jest globalna macierz informacyjna $M(\xi)$.

Zdecentralizowany algorytm wymiany (1)

- Zauważmy, że jedynym nielokalnym komponentem niezbędnym do wyznaczenia funkcji ψ_k w każdym węźle sieci jest globalna macierz informacyjna $M(\xi)$.
- Wprowadzając dla każdej lokacji x^i ($i = 1, \dots, N$) zestaw zmiennych

$$v_k^i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i\text{-ty węzeł jest aktywny w } T_k \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

i oznaczając $v_k = (v_k^1, \dots, v_k^N)$ mamy

Zdecentralizowany algorytm wymiany (1)

- Zauważmy, że jedynym nielokalnym komponentem niezbędnym do wyznaczenia funkcji ψ_k w każdym węźle sieci jest globalna macierz informacyjna $M(\xi)$.
- Wprowadzając dla każdej lokacji x^i ($i = 1, \dots, N$) zestaw zmiennych

$$v_k^i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i\text{-ty węzeł jest aktywny w } T_k \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

i oznaczając $v_k = (v_k^1, \dots, v_k^N)$ mamy

$$M(v_1, \dots, v_K) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K v_k^i M_k(x^i),$$

czyli możemy potraktować macierz jako średnia ważoną macierzy węzłowych $M_k(x^i)$ liczonych lokalnie!

Zdecentralizowany algorytm wymiany (2)

Niech r oznacza kolejny krok konfiguracji.

- Dla $r = 0$ każdy węzeł inicjuje globalną $M(\xi^{(0)})$ na podstawie swoich lokalnych macierzy $M_k(x^i)$.

Zdecentralizowany algorytm wymiany (2)

Niech r oznacza kolejny krok konfiguracji.

- Dla $r = 0$ każdy węzeł inicjuje globalną $M(\xi^{(0)})$ na podstawie swoich lokalnych macierzy $M_k(x^i)$.
- W kroku r :
 - jeden z N węzłów, np. i komunikuje się z jednym z sąsiadów, np. j z prawdopodobieństwem p_{ij}

Zdecentralizowany algorytm wymiany (2)

Niech r oznacza kolejny krok konfiguracji.

- Dla $r = 0$ każdy węzeł inicjuje globalną $M(\xi^{(0)})$ na podstawie swoich lokalnych macierzy $M_k(x^i)$.
- W kroku r :
 - jeden z N węzłów, np. i komunikuje się z jednym z sąsiadów, np. j z prawdopodobieństwem p_{ij}
 - na podstawie średniej arytmetycznej lokalnych estymat IMF wyznaczane są w obu węzłach funkcje ψ_k , $k = 1, \dots, K$,
 - gdy $v_k^i \neq v_k^j$ to na podstawie porównania $\psi_k(x^i, \xi^{(r)})$ z $\psi_k(x^j, \xi^{(r)})$ węzły mogą zamienić się statusem aktywacji (v_k^i przyjmuje wartość v_k^j i vice versa),

Zdecentralizowany algorytm wymiany (2)

Niech r oznacza kolejny krok konfiguracji.

- Dla $r = 0$ każdy węzeł inicjuje globalną $M(\xi^{(0)})$ na podstawie swoich lokalnych macierzy $M_k(x^i)$.
- W kroku r :
 - jeden z N węzłów, np. i komunikuje się z jednym z sąsiadów, np. j z prawdopodobieństwem p_{ij}
 - na podstawie średniej arytmetycznej lokalnych estymat IMF wyznaczane są w obu węzłach funkcje ψ_k , $k = 1, \dots, K$,
 - gdy $v_k^i \neq v_k^j$ to na podstawie porównania $\psi_k(x^i, \xi^{(r)})$ z $\psi_k(x^j, \xi^{(r)})$ węzły mogą zamienić się statusem aktywacji (v_k^i przyjmuje wartość v_k^j i vice versa),
 - w każdym z węzłów posiadającej status aktywnego estymata globalnej IMF jest wyznaczana jako

$$M^i(\xi^{(r)}) \leftarrow \frac{r-1}{r} M^i(\xi^{(r)}) + \frac{1}{r} \left(\sum_{k=1}^K v_k^i (M_k(x^i) + M^i(\xi_k^{(r)})) \right).$$

Przykład numeryczny

Rozważmy proces transportu i reakcji zanieczyszczeń powietrza w przedziale obserwacji $T = (0, 1000]$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (v(x, t)y(x, t)) + \beta y(x, t) \\ = \nabla \cdot (\kappa \nabla y(x, t)) + f_1(x) + f_2(x), \quad x \in \Omega = [0, 1\text{km}]^2,\end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi i początkowymi

$$\begin{aligned}\frac{\partial y(x, t)}{\partial n} &= 0, & (x, t) &\in \partial\Omega \times T, \\ y(x, 0) &= 0, & x &\in \Omega.\end{aligned}$$

- $y(x, t)$ – koncentracja zanieczyszczeń,
- $v(x, t) = 7.2 \cdot \left((x_1 + x_2 - t \cdot 10^{-3}), (2x_1 - 1)t \cdot 10^{-3} + x_2 - 1 \right)$ – pole prędkości mas powietrza,
- $\kappa = 50 \text{ m}^2/\text{s}$ – współczynnik dyfuzji turbulentnej,
- $\beta = 0.01 \text{ s}^{-1}$ – współczynnik absorpcji.

Parametry symulacji

- $f_\ell(x) = \mu_\ell \exp(-100\|x - \chi^\ell\|^2)$, $\ell = 1, 2$ – aktywne źródła zanieczyszczeń ulokowane w punktach (0.4 km, 0.7 km) i (0.8 km, 0.3 km),
- Obszar Ω podzielono na 460 podobszarów trójkątnych, wewnątrz których umieszczono czujniki,
- Przedział obserwacji podzielono na 5 podprzedziałów równej długości $T_k = (200(k-1), 200k]$, $k = 1, \dots, 5$,

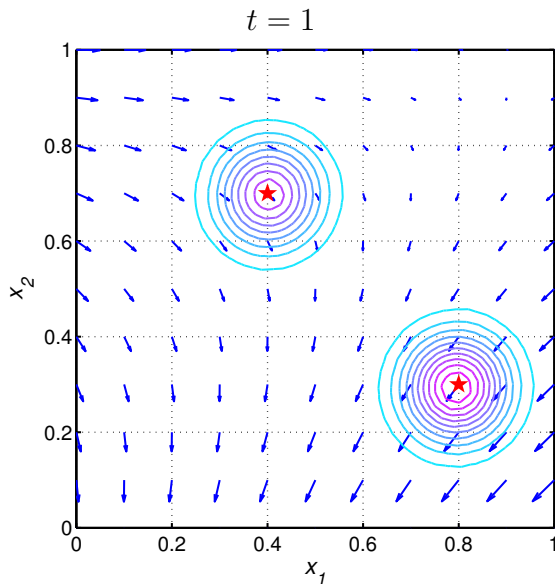
Cel

Znaleźć najlepszy harmonogram aktywacji dla $n = 100$ aktywowanych czujników skanujących gwarantujący D-optymalne estymaty intensywności i położeń źródeł $\mu = (\mu_1, \chi_1^1, \chi_1^2, \mu_2, \chi_1^2, \chi_2^2, \kappa)$.

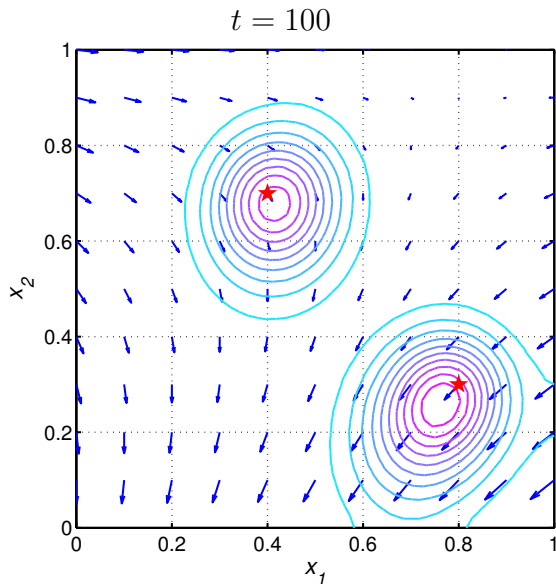
Implementacja

- program symulacyjny napisany w środowisku MATLAB,
- układ równań różniczkowych cząstkowych (równanie stanu oraz równania wrażliwościowe) rozwiązywano używając środowiska COMSOL 3.5 dla siatki złożonej z 2380 trójkątów i zachowana w pamięci,
- hardware: PC wyposażone w procesor Centrino T9300 2.53GHz i 3GB RAM.

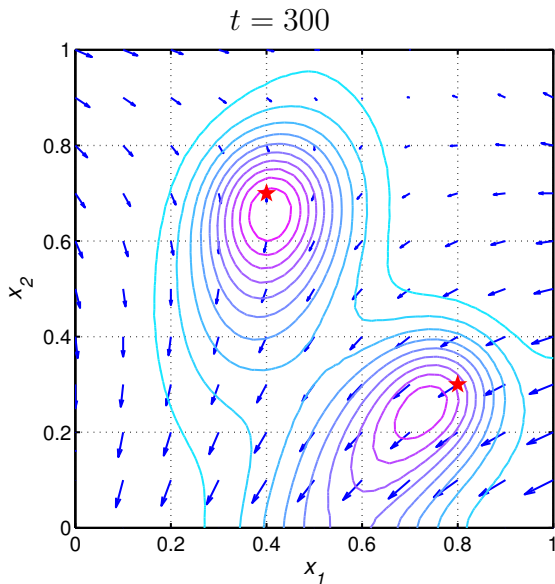
Dynamika procesu



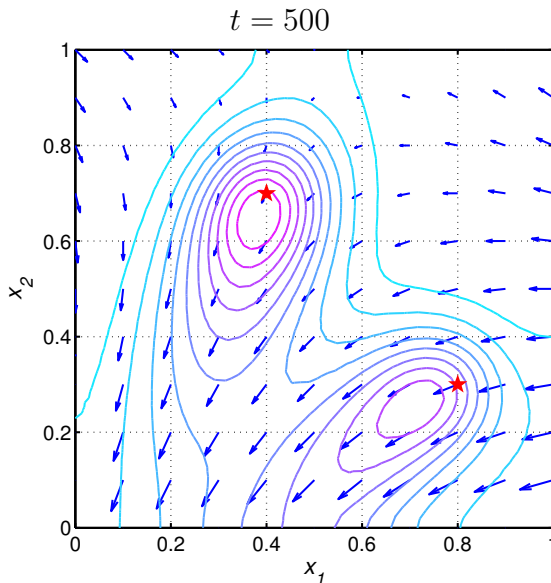
Dynamika procesu



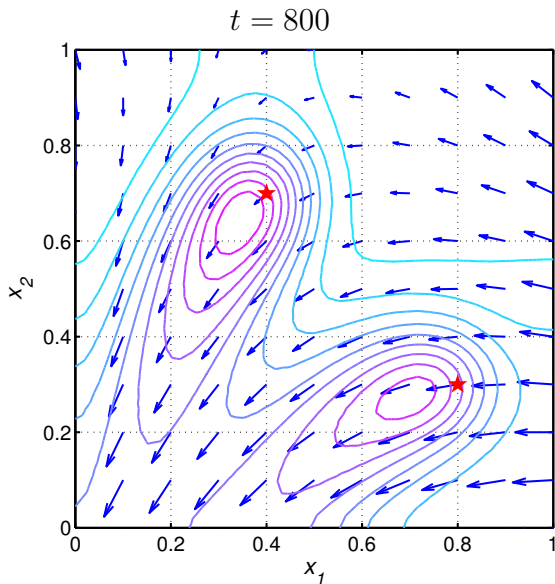
Dynamika procesu



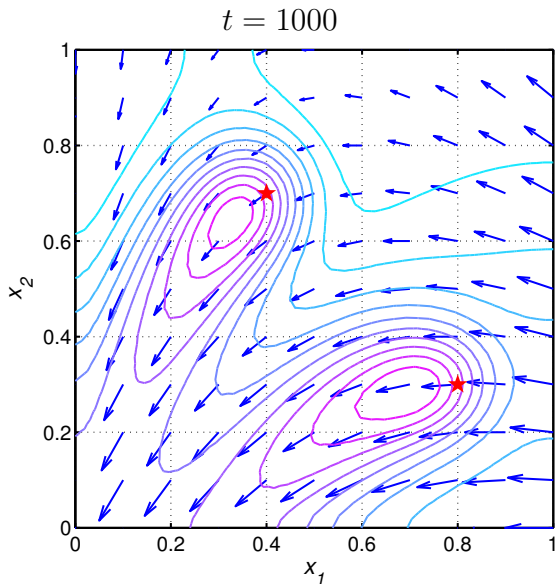
Dynamika procesu



Dynamika procesu

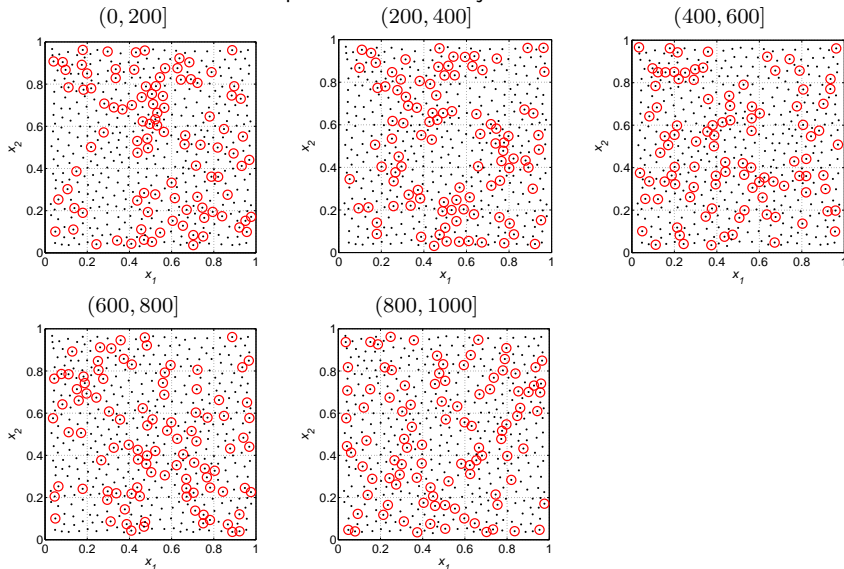


Dynamika procesu



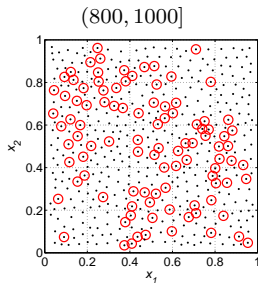
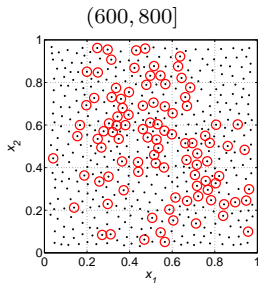
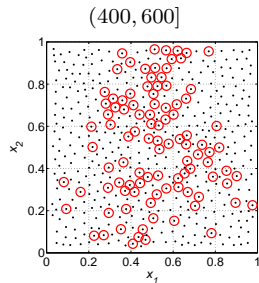
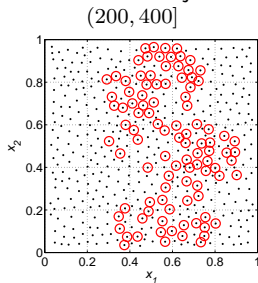
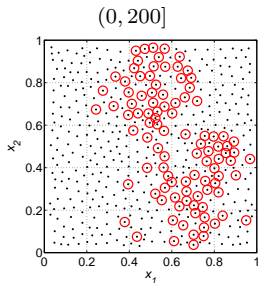
Optymalne położenia aktywnych sensorów

Liczba procesów komunikacji $r = 230$



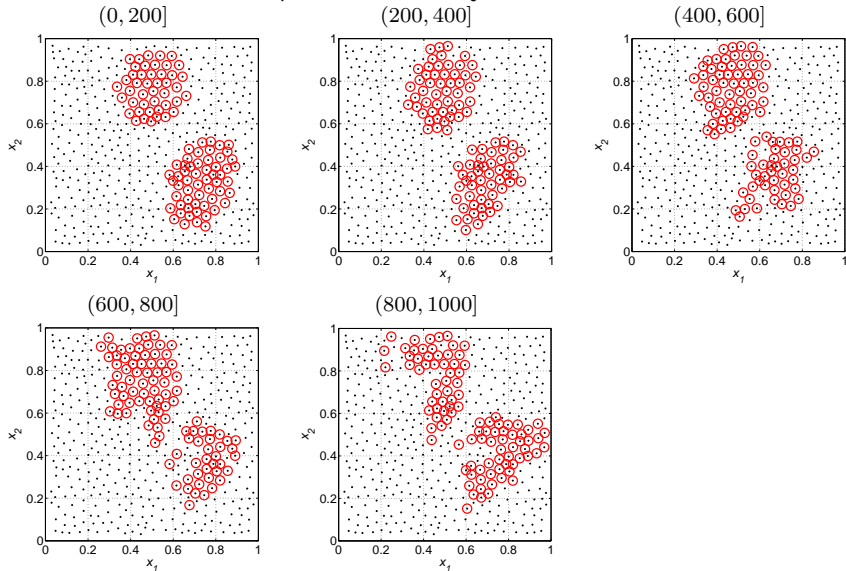
Optymalne położenia aktywnych sensorów

Liczba procesów komunikacji $r = 460$



Optymalne położenia aktywnych sensorów

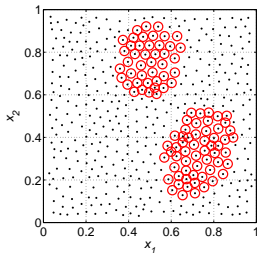
Liczba procesów komunikacji $r = 4600$



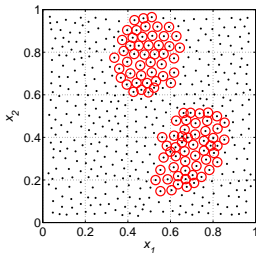
Optymalne położenia aktywnych sensorów

Liczba procesów komunikacji $r = 23000$

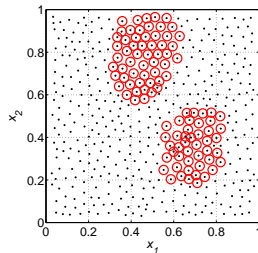
$(0, 200]$



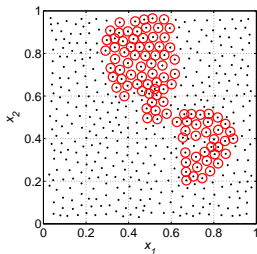
$(200, 400]$



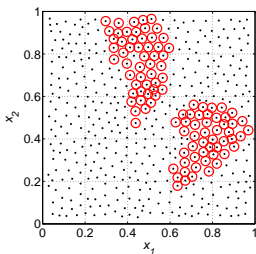
$(400, 600]$



$(600, 800]$

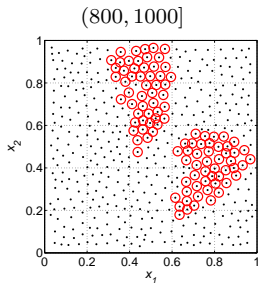
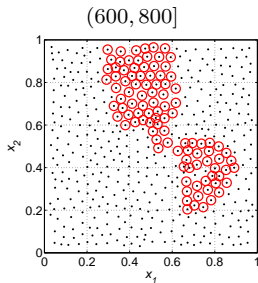
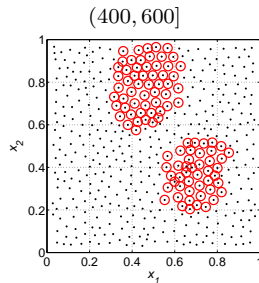
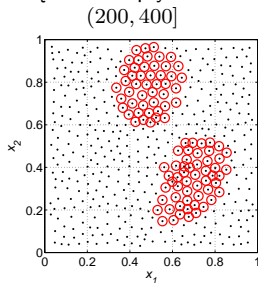
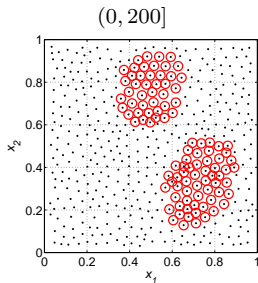


$(800, 1000]$

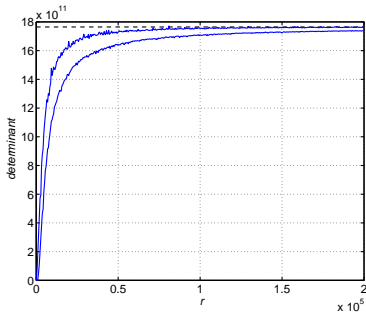


Optymalne położenia aktywnych sensorów

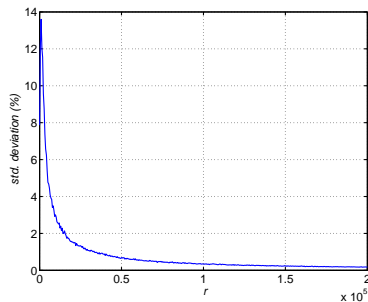
Rozwiązanie D-optymalne



Granice wyznacznika



Współczynnik zmienności



- Praca charakteryzuje podejście do optymalnej konfiguracji sieci sensorycznej w kontekście przetwarzania rozproszonego,
- Przeformułowanie problemu kombinatorycznego aktywacji czujników do jego ciągłej aproksymacji pozwala na adaptację znanych i efektywnych algorytmów optymalizacji do wyznaczania rozwiązań dla postawionego zadania,
- Otwarte problemy:
 - wprowadzenie dodatkowych ograniczeń związanych z zasobami węzłów (np. czas aktywacji, zmienna liczba aktywowanych czujników, etc.),
 - wypracowanie podejścia dla pomiarów skorelowanych.

Dla zainteresowanych:

- D. Uciński (2005): *Optimal Measurement Methods for Distributed-Parameter System Identification*. — Boca Raton, FL: CRC Press, 392 s.
- M. Patan (2012): *Optimal Sensor Network Scheduling in Identification of Distributed Parameter Systems*. — Heidelberg: Springer-Verlag, 300 s.