Wprowadzenie do technik analitycznych — Symulacja procesów

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Universytet Zielonogórski

Wykład 4

Metoda Eulera

Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

którego rozwiązanie chcemy wyznaczyć w przedziale $[t_0, t_f]$.

Podzielmy $[t_0, t_f]$ na N podprzedziałów o długości

$$h = \frac{t_f - t_0}{N}$$

Wielkość h nazywamy *długością kroku*. Ustalamy

$$t_k = t_0 + kh, \quad k = 1, \ldots, N$$

Metoda Eulera

Przybliżmy pochodną w chwili t_k ilorazem różnicowym:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$$

Można więc zapisać

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = f(t_k, y(t_k))$$

Oznacza to, że dla $k = 1, \ldots, N$ zachodzi

Schemat Eulera wprzód

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\, f(t_k, y(t_k))$$

Metoda Eulera

Przybliżmy pochodną w chwili t_k ilorazem różnicowym:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$$

Można więc zapisać

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = f(t_k, y(t_k))$$

Oznacza to, że dla $k = 1, \ldots, N$ zachodzi

Schemat Eulera wprzód

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,f(t_k, y(t_k))$$

Alternatywne wyprowadzenie metody Eulera

Całkując obie strony równania

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

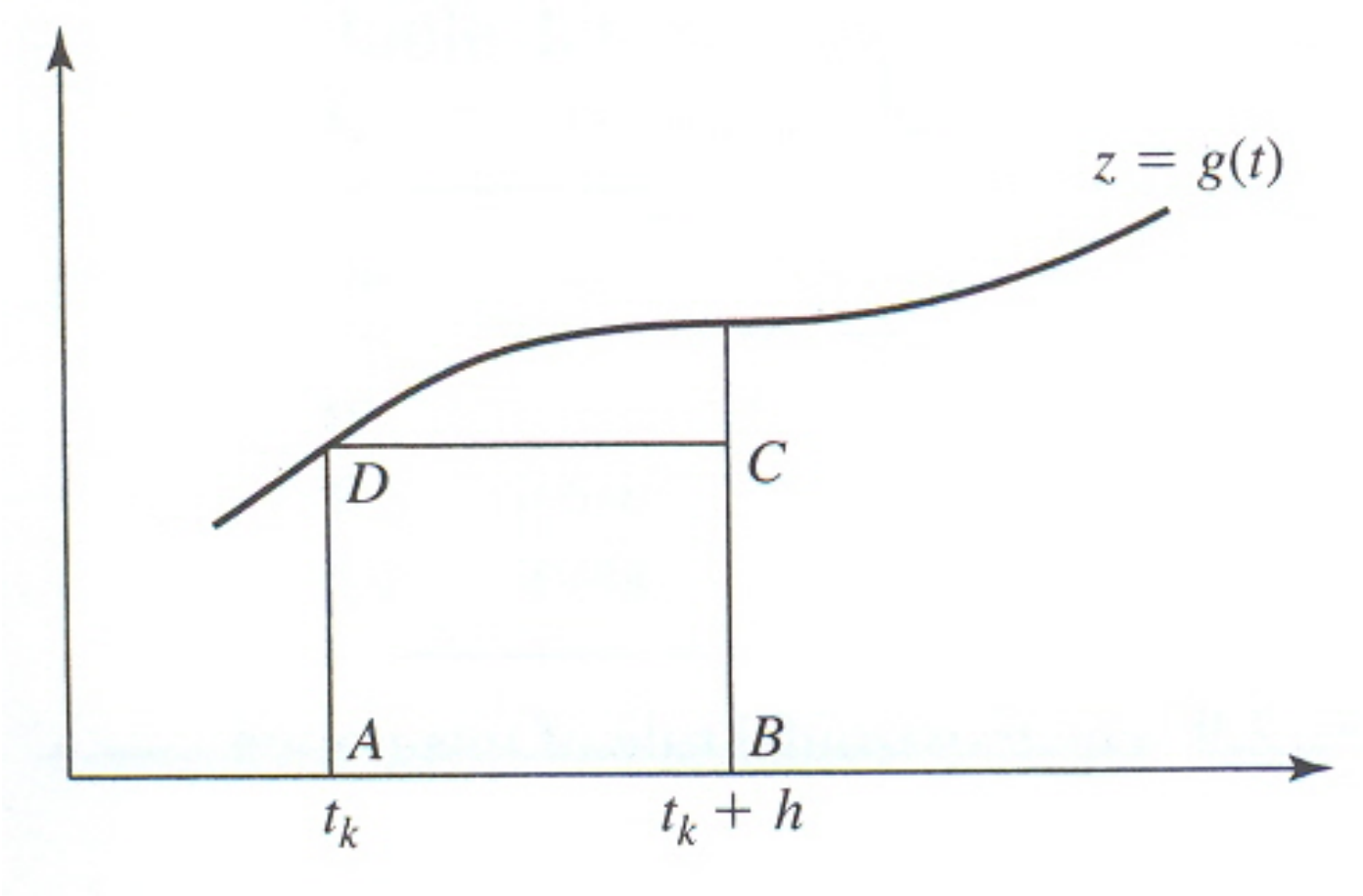
otrzymamy

$$\int_{t_k}^{t_k+h} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_k}^{t_k+h} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

czyli

$$y(t_k + h) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_k+h} \underbrace{f(t, y(t))}_{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

Alternatywne wyprowadzenie metody Eulera



Mamy formułę prostokątów:

$$\int_{t_k}^{t_k+h} g(t)\,\mathrm{d}t \approx h\,g(t_k)$$

Schemat Eulera wstecz

Tu inaczej przybliżmy pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h}$$

Prowadzi to do schematu niejawnego:

Schemat Eulera wstecz

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$$

Pytanie: Jak to rozwiązywać?

Metoda Eulera nie jest zbyt dokładna, dlatego też potrzeba bardziej wyrafinowanych technik.

Schemat Eulera wstecz

Tu inaczej przybliżmy pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h}$$

Prowadzi to do schematu niejawnego:

Schemat Eulera wstecz

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$$

Pytanie: Jak to rozwiązywać?

Metoda Eulera nie jest zbyt dokładna, dlatego też potrzeba bardziej wyrafinowanych technik.

Schemat Eulera wstecz

Tu inaczej przybliżmy pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h}$$

Prowadzi to do schematu niejawnego:

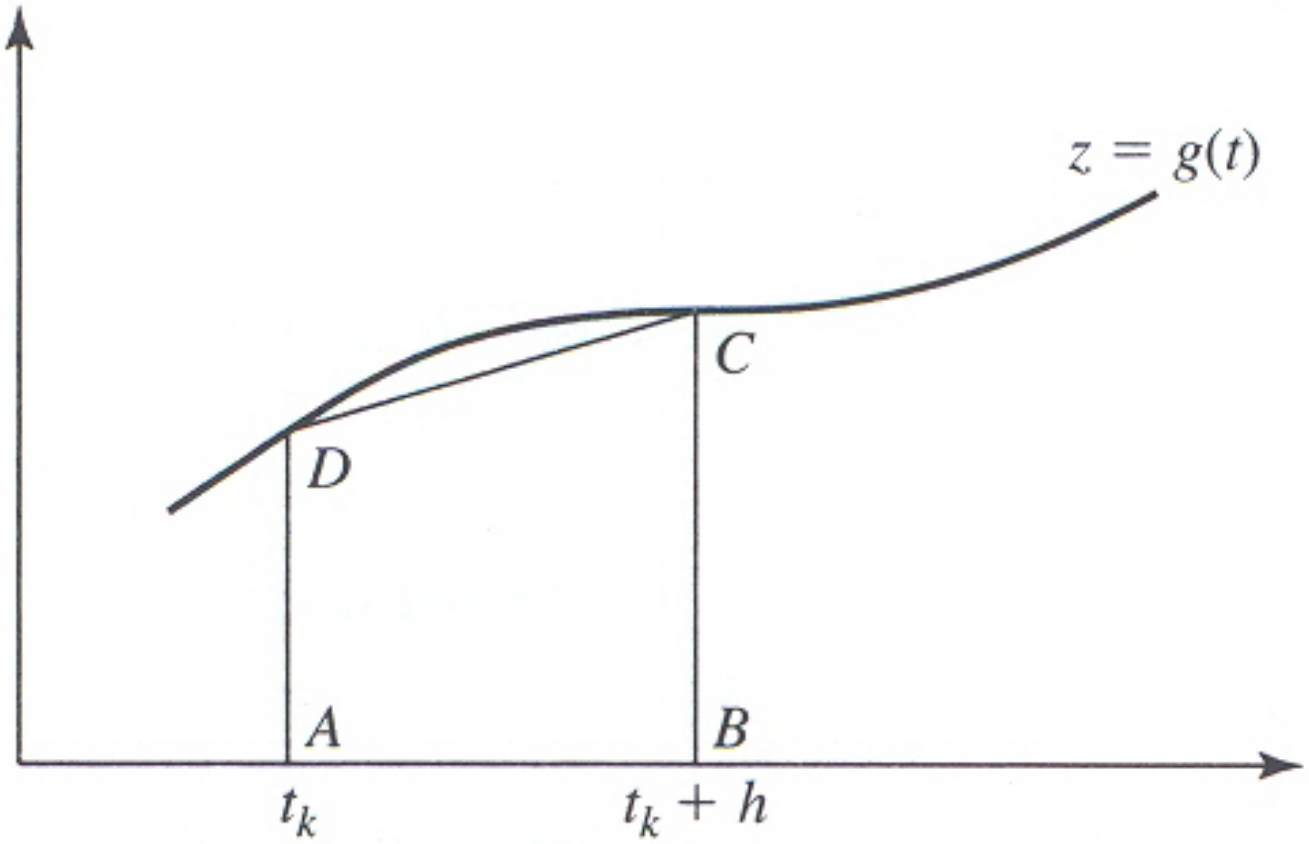
Schemat Eulera wstecz

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$$

Pytanie: Jak to rozwiązywać?

Metoda Eulera nie jest zbyt dokładna, dlatego też potrzeba bardziej wyrafinowanych technik.

Algorytm przewidywania i korekcji (metoda Heuna)



Mamy formułę trapezów:

$$\int_{t_k}^{t_k+h} g(t)\,\mathrm{d}t \approx h\frac{g(t_k) + g(t_{k+1})}{2}$$

Algorytm przewidywania i korekcji (metoda Heuna)

Z równości

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underbrace{f(t, y(t))}_{g(t)} \, \mathrm{d}t$$

wynika więc

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{h}{2}\Big[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, \underbrace{y(t_{k+1})}_{\text{nieznane!}}\Big]$$

Jest to więc schemat niejawny, który można uważać za połączenie algortmów Eulera wprzód i wstecz (dlaczego?).

Pytanie: Jak uczynić go użytecznym?

Algorytm przewidywania i korekcji (metoda Heuna)

Przewidywanie (predykcja) — por. metodę Eulera

$$y^{\star}(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,f(t_k, y(t_k))$$

Korekcja

$$y(t_k + h) = y(t_k) + \frac{h}{2}\Big[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y^{\star}(t_{k+1}))\Big]$$

Etap korekcji można implementowac z zastosowaniem metody iteracji prostej.

Algorytm przewidywania i korekcji (metoda Heuna)

Przewidywanie (predykcja) — por. metodę Eulera

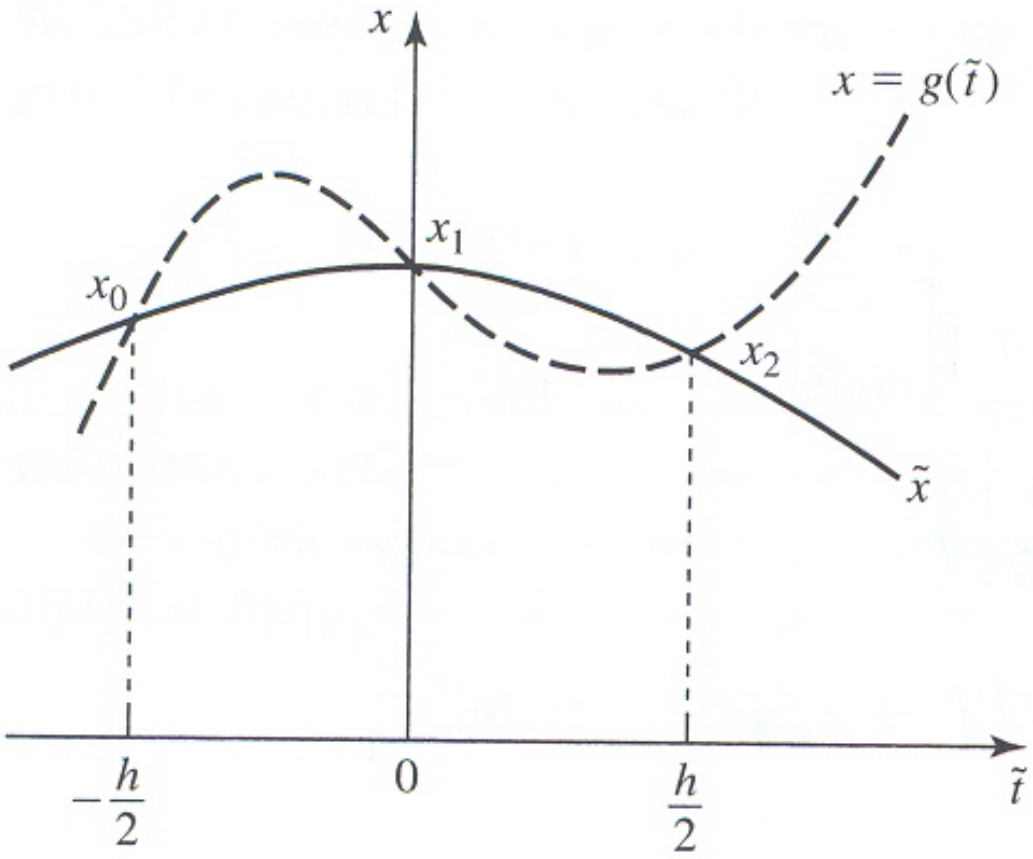
$$y^{\star}(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,f(t_k, y(t_k))$$

Korekcja

$$y(t_k + h) = y(t_k) + \frac{h}{2}\Big[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y^{\star}(t_{k+1})\Big]$$

Etap korekcji można implementowac z zastosowaniem metody iteracji prostej.

Algorytm Rungego



Mamy formułę Simpsona:

$$\int_{t_k}^{t_k+h} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{h}{6}(x_0 + 4x_1 + x_2)$$

Uzasadnienie

Przybliżając $g(t)$ parabolą $at^2 + bt + c$ mamy

$$x_0 = a\frac{h^2}{4} - b\frac{h}{2} + c$$
$$x_1 = c$$
$$x_2 = a\frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c$$

skąd

$$c = x_1$$
$$b = \frac{x_2 - x_0}{h}$$
$$a = \frac{2}{h^2}(x_0 - 2x_1 + x_2)$$

Uzasadnienie (c.d.)

Pole pod parabolą wynosi

$$\int_{-h/2}^{h/2} (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{2}{h^2}(x_0 - 2x_1 + x_2)t^2 + \frac{x_2 - x_0}{h} t + x_1 \right) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{h}{6}(x_0 + 4x_1 + x_2)$$

Algorytm Rungego

Z równości

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

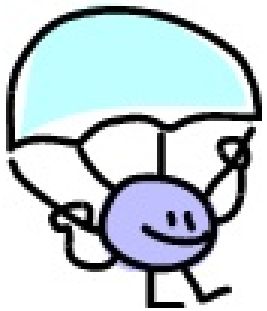
wynika więc

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{h}{6}(m_0 + 4m_1 + m_3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
m_0 &= f(t_k, y(t_k)) \\
m_1 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + m_0\frac{h}{2}) \\
m_2 &= f(t_k + h, y_k + m_0 h) \\
m_3 &= f(t_k + h, y_k + m_2 h)
\end{aligned}$$

Równanie pierwszego rzędu



Prędkość skoczka spadochronowego opisuje równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = g - \frac{c}{m}v(t), \quad v(0) = 0$$

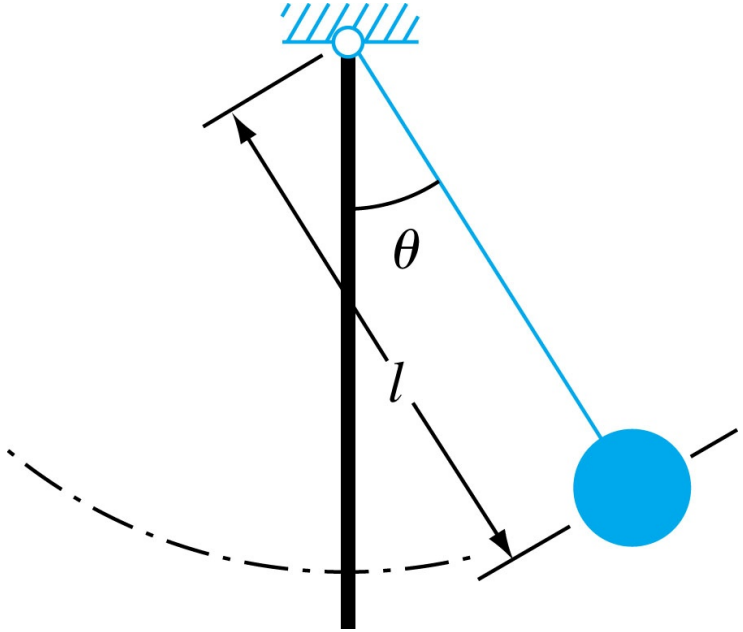
gdzie: $m = 68.1\ \mathrm{kg}$, $c = 12.5\ \mathrm{kg/s}$, $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$. Rozwiązanie jest postaci

$$v(t) = \frac{gm}{c}(1 - \exp(-(c/m)t))$$

Spróbujmy jednak je rozwiązać numerycznie w Excelu, Matlabie, Scilabie oraz Simulinku.

Równanie drugiego rzędu

Rozważmy teraz wahadło



Opisuje je równanie

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

gdzie: $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, $\ell = 0.6\ \mathrm{m}$.

Równanie drugiego rzędu

Rozwiążemy je z zastosowaniem Matlaba, Scilaba i Simulinka, jednak przedtem trzeba je zastąpić układem równań pierwszego rzędu. Definiując

$$y_1(t) = \theta(t)$$
$$y_2(t) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}(t) &= y_2(t), & y_1(0) &= \frac{\pi}{4} \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}(t) &= -\frac{g}{\ell}\sin(y_1(t)), & y_2(0) &= 0 \end{aligned}$$