Analityczne metody detekcji uszkodzeń

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wykład 5

Model procesu

Rozważmy czasowo-dyskretny model liniowy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{aligned}$$

gdzie:

- k — dyskretny czas,
- $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ — wektor stanu,
- $\boldsymbol{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ — wektor wejścia,
- $\boldsymbol{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ — wektor wyjścia,
- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ — macierze parametrów

Pytanie: Co z warunkami początkowymi?

Model procesu

Rozważmy czasowo-dyskretny model liniowy

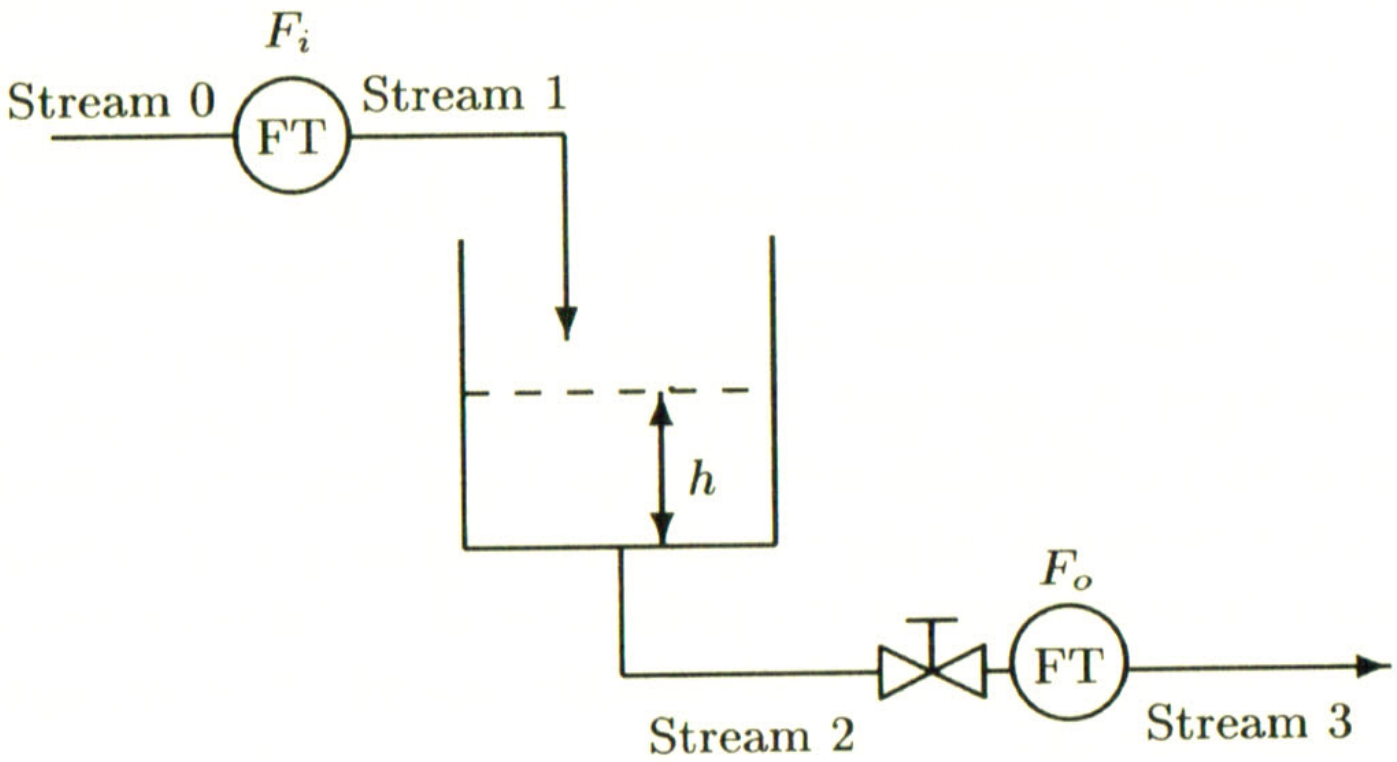
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{aligned}$$

gdzie:

- k — dyskretny czas,
- $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ — wektor stanu,
- $\boldsymbol{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ — wektor wejścia,
- $\boldsymbol{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ — wektor wyjścia,
- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ — macierze parametrów

Pytanie: Co z warunkami początkowymi?

Przykład: układ zbiornika



Oznaczenia: F_i — przepływ wejściowy, $F_o = ch$ — przepływ wyjściowy, FT — możliwe punkty pomiaru przepływu.

Przykład: układ zbiornika

Równanie bilansu cieczy w zbiorniku:

$$A_c \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = F_i(t) - ch(t)$$

gdzie:

- A_c — pole przekroju poprzecznego zbiornika,
- h — poziom cieczy,
- c — stała zależna od zaworu

Zakładamy, że wielkością mierzoną jest przepływ wyjściowy F_o, nominalnie równy ch.

Przykład: układ zbiornika

Roważmy ten układ w chwilach $t = kT_0, k = 0, 1, 2, \ldots$ będących wielokrotnościami okresu próbkowania T_0 i zastosujmy przybliżenie

$$A_c \frac{\mathrm{d}h(kT_0)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{h((k+1)T_0) - h(kT_0)}{T_0}$$

Otrzymujemy

$$A_c \frac{h((k+1)T_0) - h(kT_0)}{T_0} = F_i(kT_0) - ch(kT_0)$$

i dalej

$$h((k+1)T_0) = \left(1 - \frac{cT_0}{A_c}\right) h(kT_0) + \frac{T_0}{A_c} F_i(kT_0)$$

Przykład: układ zbiornika

Roważmy ten układ w chwilach $t = kT_0, k = 0, 1, 2, \ldots$ będących wielokrotnościami okresu próbkowania T_0 i zastosujmy przybliżenie

$$A_c \frac{\mathrm{d}h(kT_0)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{h((k+1)T_0) - h(kT_0)}{T_0}$$

Otrzymujemy

$$A_c \frac{h((k+1)T_0) - h(kT_0)}{T_0} = F_i(kT_0) - ch(kT_0)$$

i dalej

$$h((k+1)T_0) = \left(1 - \frac{cT_0}{A_c}\right) h(kT_0) + \frac{T_0}{A_c} F_i(kT_0)$$

Przykład: układ zbiornika

Roważmy ten układ w chwilach $t = kT_0, k = 0, 1, 2, \ldots$ będących wielokrotnościami okresu próbkowania T_0 i zastosujmy przybliżenie

$$A_c \frac{\mathrm{d}h(kT_0)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{h((k+1)T_0) - h(kT_0)}{T_0}$$

Otrzymujemy

$$A_c \frac{h((k+1)T_0) - h(kT_0)}{T_0} = F_i(kT_0) - ch(kT_0)$$

i dalej

$$h((k+1)T_0) = \left(1 - \frac{cT_0}{A_c}\right) h(kT_0) + \frac{T_0}{A_c} F_i(kT_0)$$

Przykład: układ zbiornika

Dokonując podstawień

$$\boldsymbol{u}(k) = \left[F_i(kT_0)\right], \quad \boldsymbol{y}(k) = \left[F_o(kT_0)\right], \boldsymbol{x}(k) = \left[h(kT_0)\right]$$
$$\boldsymbol{A} = \left[1 - \frac{cT_0}{A_c}\right], \quad \boldsymbol{B} = \left[\frac{T_0}{A_c}\right], \boldsymbol{C} = \left[c\right], \quad \boldsymbol{D} = \left[0\right]$$

otrzymujemy opis

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)$$

Pytanie: A co z zakłóceniami pomiarowymi? W symulacjach zakłada się $\mathcal{N}(0, 10^{-4})$.

Przykład: układ zbiornika

Dokonując podstawień

$$\boldsymbol{u}(k) = \left[F_i(kT_0)\right], \quad \boldsymbol{y}(k) = \left[F_o(kT_0)\right], \boldsymbol{x}(k) = \left[h(kT_0)\right]$$
$$\boldsymbol{A} = \left[1 - \frac{cT_0}{A_c}\right], \quad \boldsymbol{B} = \left[\frac{T_0}{A_c}\right], \boldsymbol{C} = \left[c\right], \quad \boldsymbol{D} = \left[0\right]$$

otrzymujemy opis

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)$$

Pytanie: A co z zakłóceniami pomiarowymi? W symulacjach zakłada się $\mathcal{N}(0, 10^{-4})$.

Przykład: układ zbiornika

Dokonując podstawień

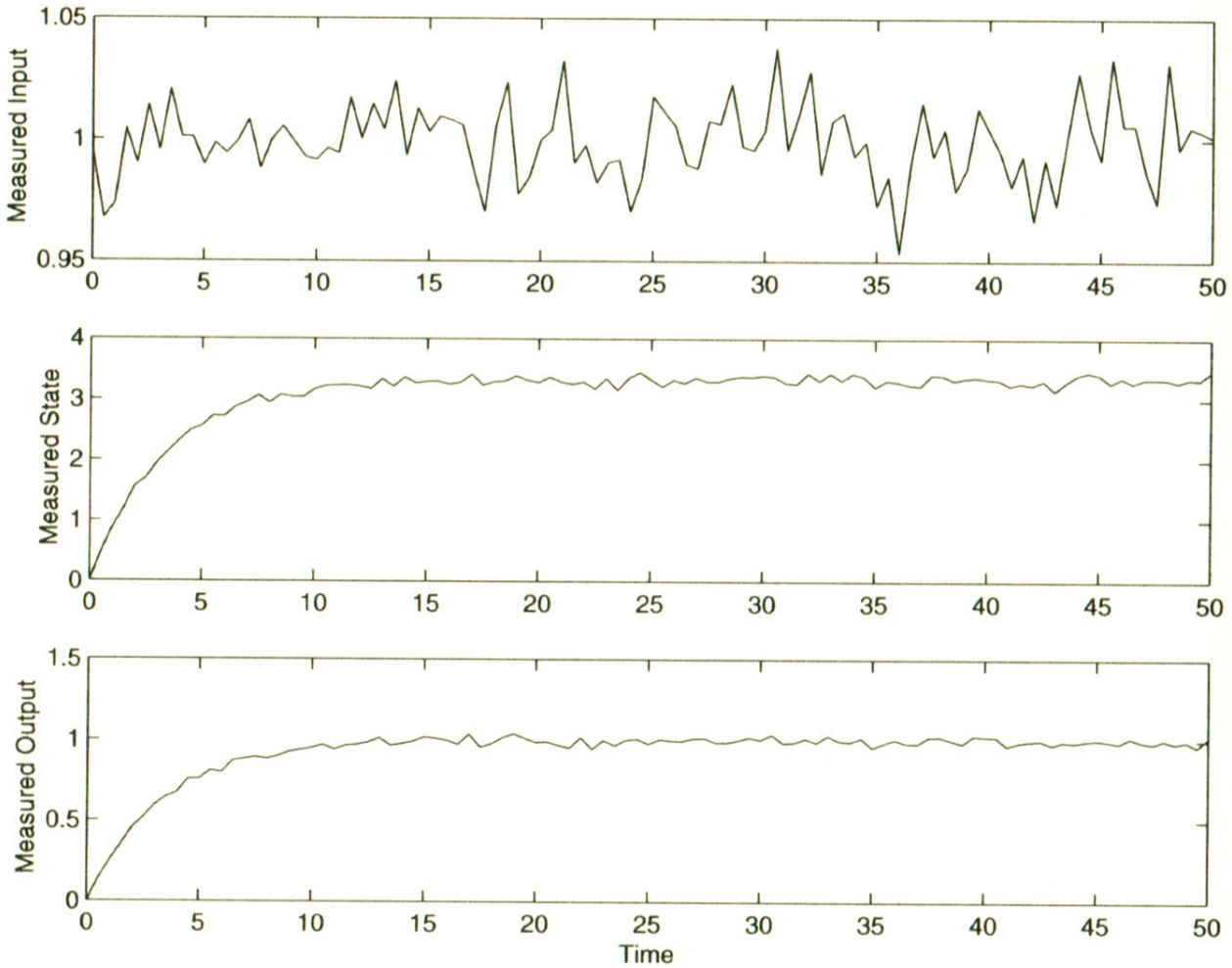
$$\boldsymbol{u}(k) = \left[F_i(kT_0)\right], \quad \boldsymbol{y}(k) = \left[F_o(kT_0)\right], \boldsymbol{x}(k) = \left[h(kT_0)\right]$$
$$\boldsymbol{A} = \left[1 - \frac{cT_0}{A_c}\right], \quad \boldsymbol{B} = \left[\frac{T_0}{A_c}\right], \boldsymbol{C} = \left[c\right], \quad \boldsymbol{D} = \left[0\right]$$

otrzymujemy opis

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)$$

Pytanie: A co z zakłóceniami pomiarowymi? W symulacjach zakłada się $\mathcal{N}(0, 10^{-4})$.

Przykład: układ zbiornika



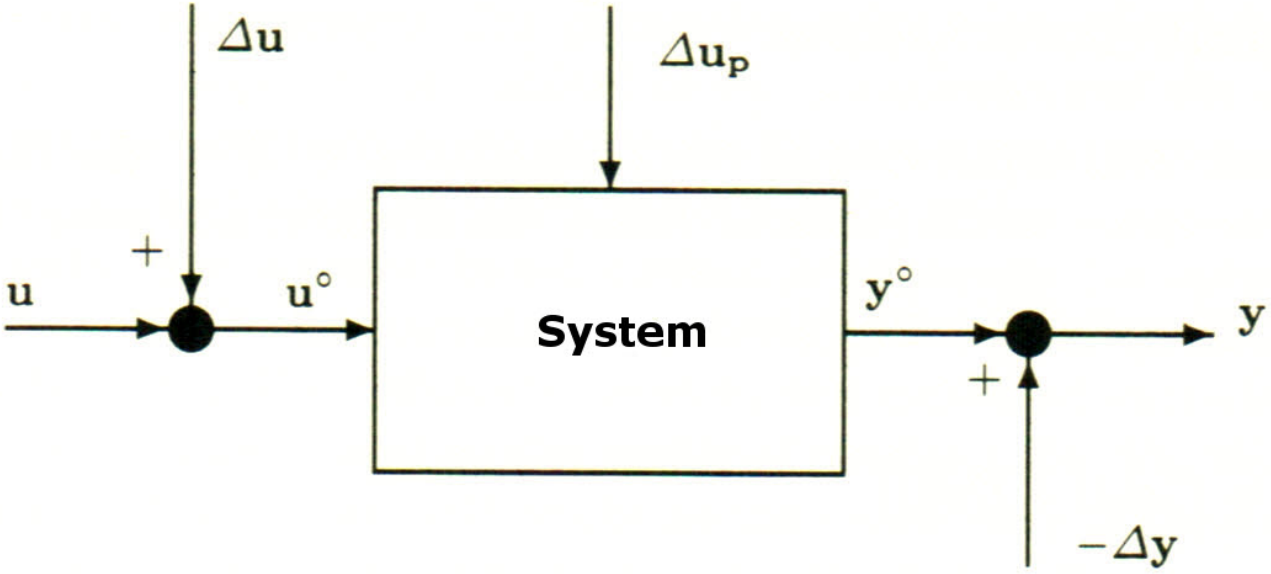
symulacje dla $c = 0.3$, $A_c = 1$, $T_0 = 0.5$.

Uszkodzenia addytywne

Uszkodzenia można modelować jako nieznane zmiany sygnałów w systemie. Uszkodzenia addytywne obejmują:

- uszkodzenia urządzeń wykonawczych $\Delta \boldsymbol{u}(t)$ (zablokowany zawór, przepalone uzwojenie silnika)
- uszkodzenia czujników $\Delta \boldsymbol{y}(t)$ (skorodowana termopara, nieszczelność czujnika ciśnienia)
- uszkodzenia w systemie $\Delta \boldsymbol{u}_p(t)$ (wyciek z rurociągu)

Uszkodzenia addytywne



Obserwowane wartości wejścia $\boldsymbol{u}(k)$ i wyjścia $\boldsymbol{y}(k)$ są związane z prawdziwymi wartościami tych wielkości $\boldsymbol{u}^\circ(k)$ i $\boldsymbol{y}^\circ(k)$ zależnościami

$$\boldsymbol{u}^\circ(k) = \boldsymbol{u}(k) + \Delta\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}^\circ(k) = \boldsymbol{y}(k) + \Delta\boldsymbol{y}(k)$$

Uszkodzenia addytywne

Łącząc uszkodzenia addytywny w jeden wektor

$$\boldsymbol{f}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{u}(k) \\ \Delta \boldsymbol{u}_p(k) \\ \Delta \boldsymbol{y}(k) \end{bmatrix}$$

otrzymuje się zmodyfikowane równania stanu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{B}_f\boldsymbol{f}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{D}_f\boldsymbol{f}(k) \end{aligned}$$

gdzie: $\boldsymbol{B}_f$, $\boldsymbol{D}_f$ — odpowiednie macierze uszkodzeń.

Alternatywa: uszkodzenia multyplikatywne

$$\boldsymbol{x}(k+1) = (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(k) + (\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = (\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}(k)$$

Podejście związane jest z metodą najmniejszych kwadratów (ogólniej: identyfikacją parametryczną). Monitoruje się różnicę

$$\Delta p = p_{\text{nom}} - \widehat{p}$$

gdzie:

- p_{nom} — nominalna wartość interesującego nas parametru
- $\widehat{p}$ — ocena tego samego parametru otrzymana na podstawie aktualnych danych

Nawet gdy brak jest uszkodzeń, $\Delta p \neq 0$ wskutek zakłóceń i szumów. Uszkodzenie jest sygnalizowane gdy

$$|\Delta p| > \delta$$

gdzie: δ — ustalona wartość progowa.

Alternatywa: uszkodzenia multyplikatywne

$$\boldsymbol{x}(k+1) = (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(k) + (\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = (\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}(k)$$

Podejście związane jest z metodą najmniejszych kwadratów (ogólniej: identyfikacją parametryczną). Monitoruje się różnicę

$$\Delta p = p_{\text{nom}} - \widehat{p}$$

gdzie:

- p_{nom} — nominalna wartość interesującego nas parametru
- $\widehat{p}$ — ocena tego samego parametru otrzymana na podstawie aktualnych danych

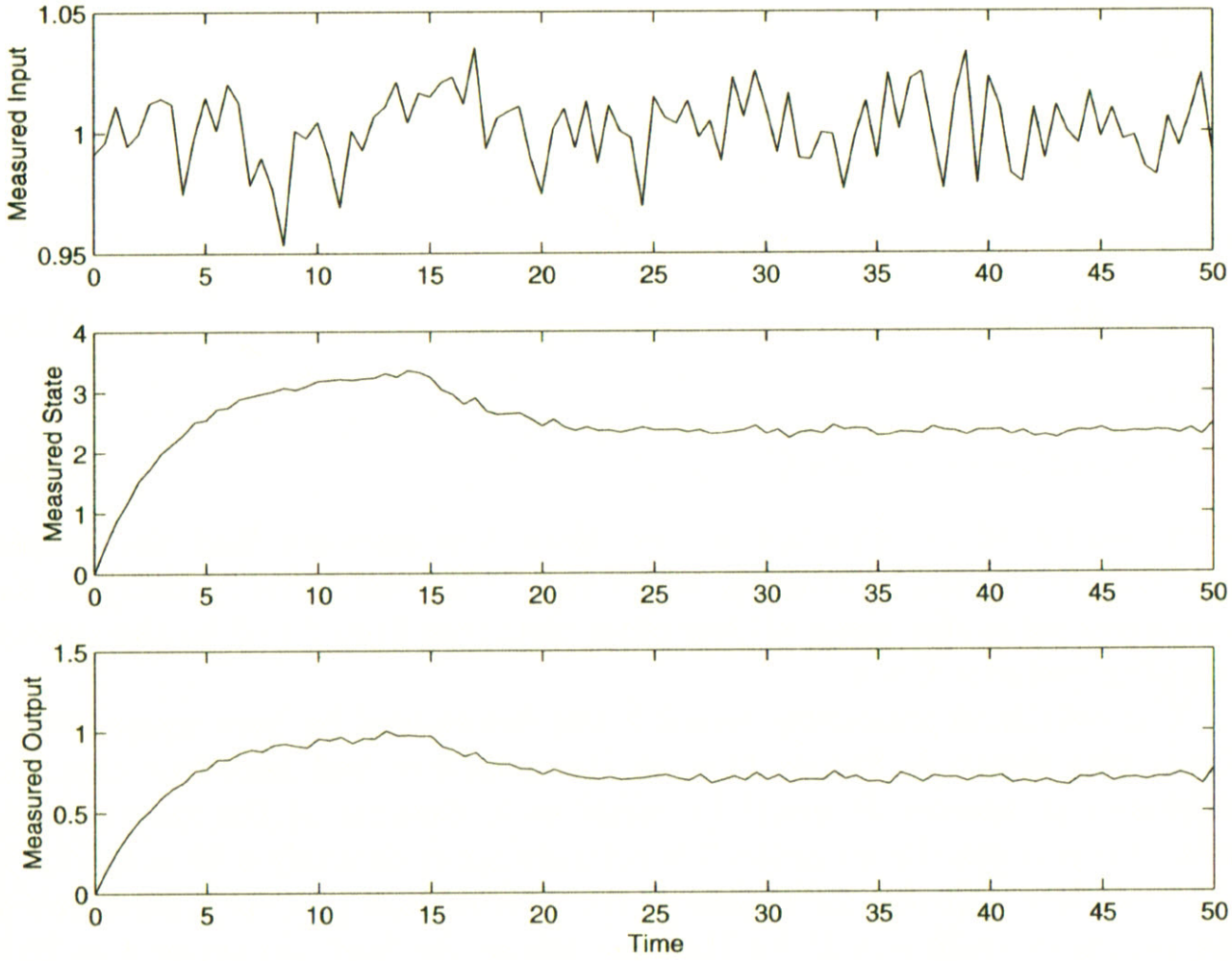
Nawet gdy brak jest uszkodzeń, $\Delta p \neq 0$ wskutek zakłóceń i szumów. Uszkodzenie jest sygnalizowane gdy

$$|\Delta p| > \delta$$

gdzie: δ — ustalona wartość progowa.

Przykład: wyciek bezpośrednio przed zbiornikiem

Załóżmy, że w chwili $t = 14.5$ rozpoczyna się wyciek w *Stream 1* (30% spadek amplitudy przepływu):



Przykład: wyciek bezpośrednio przed zbiornikiem

Wyciek nie wpływa na wejście F_i, ale wpływa na przepływ cieczy do zbiornika. Skutkuje to spadkiem h i F_o. Uszkodzenie to modeluje się zmianą parametru B

Zauważmy, że zachodzi

$$\begin{aligned} y(k+1) &= Cx(k+1) && \text{(z równ. wyjścia)} \\ &= \underbrace{Cx(k)}_{y(k)} + CBu(k) && \text{(z równania stanu)} \\ &= \boldsymbol{\psi}^{\mathsf{T}}(k)\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

gdzie:

- $\boldsymbol{\psi}^{\mathsf{T}}(k) = \begin{bmatrix} y(k) & u(k) \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & CB \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$

Przykład: wyciek bezpośrednio przed zbiornikiem

Zauważmy, że $y(k+1)$ zależy liniowo od $\boldsymbol{\theta}$, a to daje możliwość zastosowania MNK. Istotnie, wprowadzając

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k+1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi^{\mathsf{T}}(0) \\ \psi^{\mathsf{T}}(1) \\ \vdots \\ \psi^{\mathsf{T}}(k) \end{bmatrix}$$

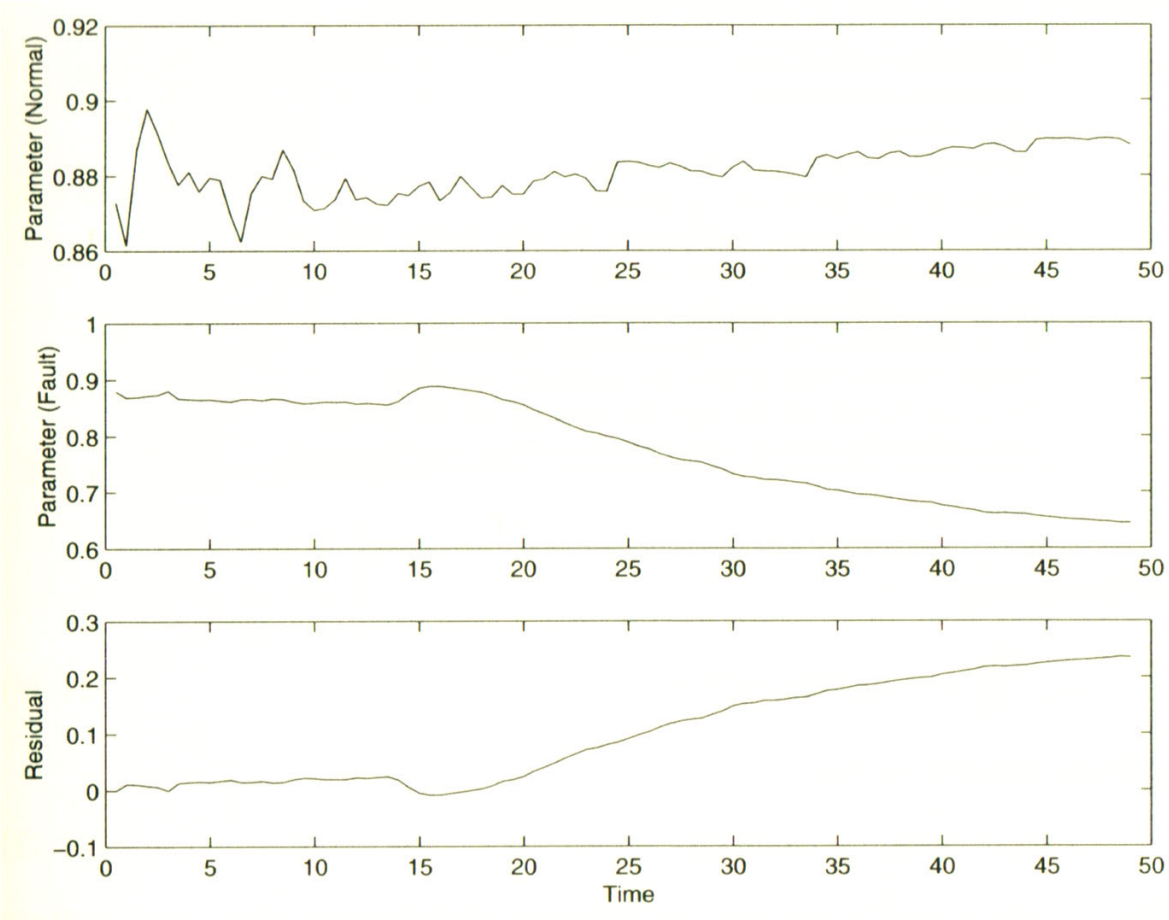
można zapisać

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}$$

skąd

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{z}$$

Przykład: wyciek bezpośrednio przed zbiornikiem



Zauważyć opóźnienie w detekcji (dopiero w chwili $t = 21$) oraz ocenę parametru B w warunkach normalnej pracy na poziomie 0.88 (obciążenie!).

Wykorzystanie obserwatora pełnego rzędu

Teraz rozważmy uszkodzenia addytywne z modelem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{B}_f\boldsymbol{f}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}_f\boldsymbol{f}(k) \end{aligned}$$

Stan i wyjście można estymować zastosowaniem obserwatora

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}(k+1) &= \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{H}\big[\boldsymbol{y}(k) - \widehat{\boldsymbol{y}}(k)\big] \\ \widehat{\boldsymbol{y}}(k) &= \boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{x}}(k) \end{aligned}$$

Wykorzystanie obserwatora pełnego rzędu

Po odjęciu stronami i zdefiniowaniu

$$\Delta \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \widehat{\boldsymbol{x}}(k), \quad \Delta \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{y}(k) - \widehat{\boldsymbol{y}}(k)$$

otrzymujemy równania błedów

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{x}(k+1) &= [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{C}]\Delta \boldsymbol{x}(k) + [\boldsymbol{B}_f - \boldsymbol{H}\boldsymbol{D}_f]\boldsymbol{f}(k) \\ \Delta \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\Delta \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}_f \boldsymbol{f}(k) \end{aligned}$$

Nie zależą one od wejścia $\boldsymbol{u}(k)$, a od uszkodzenia. Ponieważ stan nie jest zazwyczaj pomiarowo dostępny, jako residuum wykorzystuje się $\Delta \boldsymbol{y}(k)$. To residuum zazwyczaj transformuje się tak, aby wzmocnić efekt uszkodzenia, a zmniejszyć wpływ szumów.

Wykorzystanie obserwatora pełnego rzędu

Po odjęciu stronami i zdefiniowaniu

$$\Delta \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \widehat{\boldsymbol{x}}(k), \quad \Delta \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{y}(k) - \widehat{\boldsymbol{y}}(k)$$

otrzymujemy równania błedów

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{x}(k+1) &= [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{HC}]\Delta \boldsymbol{x}(k) + [\boldsymbol{B}_f - \boldsymbol{HD}_f]\boldsymbol{f}(k) \\ \Delta \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\Delta \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}_f \boldsymbol{f}(k) \end{aligned}$$

Nie zależą one od wejścia $\boldsymbol{u}(k)$, a od uszkodzenia. Ponieważ stan nie jest zazwyczaj pomiarowo dostępny, jako residuum wykorzystuje się $\Delta \boldsymbol{y}(k)$. To residuum zazwyczaj transformuje się tak, aby wzmocnić efekt uszkodzenia, a zmniejszyć wpływ szumów.

Przykład: wyciek bezpośrednio przed zbiornikiem

Mamy

$$\boldsymbol{u}^{\circ}(k) = \boldsymbol{u}(k) + \Delta\boldsymbol{u}(k)$$

gdzie: $\Delta\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{f}(k)$ — wartość ujemna reprezentująca wielkość uszkodzenia.

Stąd

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{B}_f\boldsymbol{f}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{aligned}$$

gdzie: $\boldsymbol{B}_f = \left[T_0/A_c\right]$.

Rozważmy symulacje dla $H = 0.01$.

Przykład: wyciek bezpośrednio przed zbiornikiem

Mamy

$$\boldsymbol{u}^{\circ}(k) = \boldsymbol{u}(k) + \Delta\boldsymbol{u}(k)$$

gdzie: $\Delta\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{f}(k)$ — wartość ujemna reprezentująca wielkość uszkodzenia.

Stąd

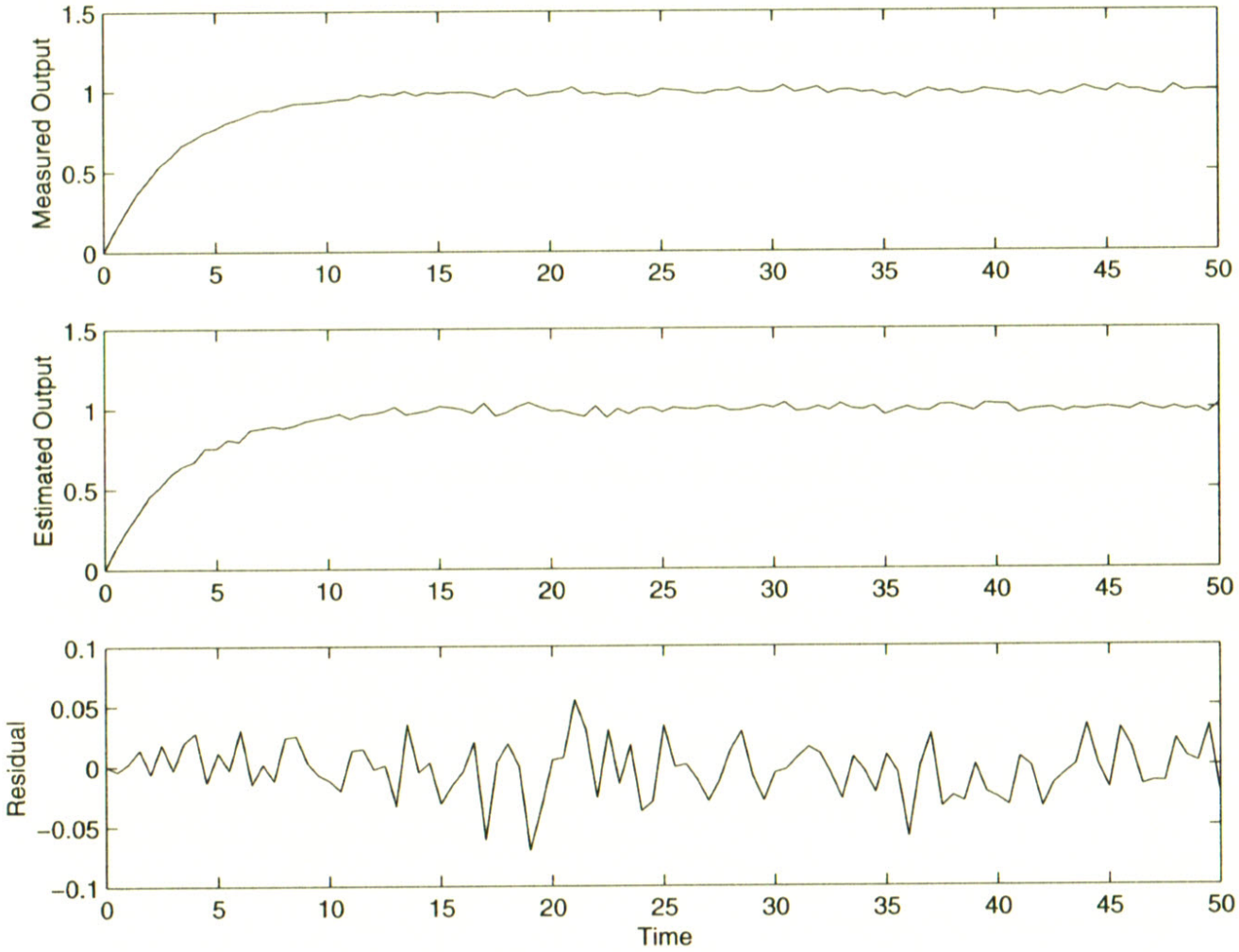
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{B}_f\boldsymbol{f}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{aligned}$$

gdzie: $\boldsymbol{B}_f = \left[T_0/A_c\right]$.

Rozważmy symulacje dla $H = 0.01$.

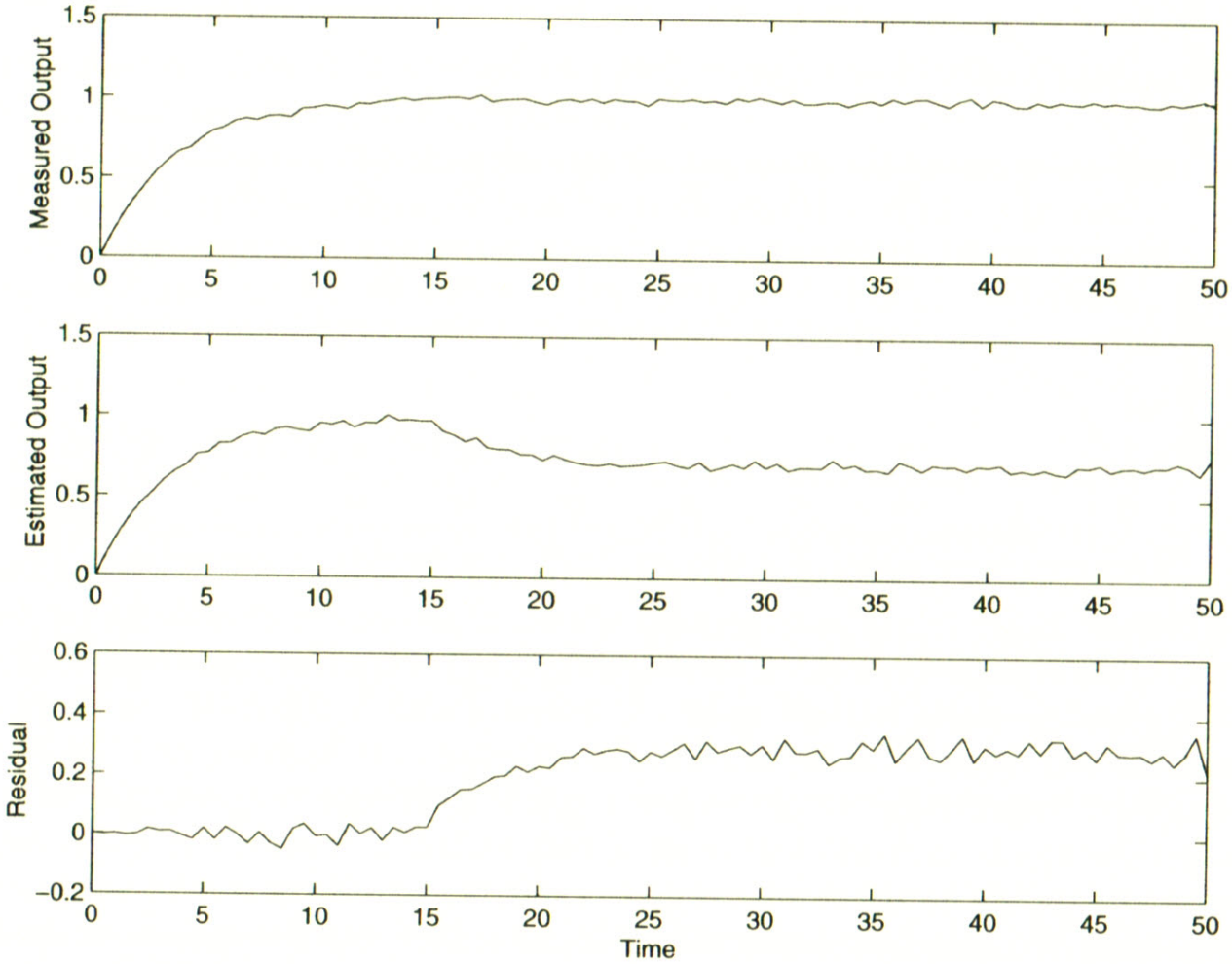
Przykład: wyciek bezpośrednio przed zbiornikiem

Sytuacja bez uszkodzenia — małe residuum:



Przykład: wyciek bezpośrednio przed zbiornikiem

Uszkodzenie w chwili $t = 14.5$ — duże odchylenie już dla $t = 15.5$:



Przykład: wyciek bezpośrednio przed zbiornikiem

1. Przykład uwidacznia, że pewne uszkodzenia można modelować zarówno jako addytywne, jak i multyplikatywne.
2. W praktyce, błąd estymacji może być pobudzany istotnym szumem.
3. Błędy modelowania mogą prowadzić do niepełnego skompensowania wymuszenia $\boldsymbol{u}(t)$.

Stąd potrzeba stosowania przekształconego wektora błędu estymacji:

$$\boldsymbol{r}(k) = \boldsymbol{W}\,\Delta\boldsymbol{y}(k)$$