Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Metody analizy danych – ćwiczenia

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa (2 godziny)

Program ćwiczeń obejmuje następująca zadania:

1. Doświadczenie polega na wyciągnięciu losowo dwóch kart z koszyka zawierającego cztery karty oznaczone liczbami całkowitymi od 1 do 4.
   (a) Określić przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω_1 jeżeli losowanie jest ze zwracaniem.
   (b) Określić przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω_2 jeżeli losowanie jest bez zwracania.
2. Doświadczenie polega na rzucie kostką aż do momentu otrzymania sześciu oczek. Określić przestrzeń zdarzeń elementarnych.
3. Określić przestrzeń zdarzeń elementarnych dla doświadczenia polegającego na pomiarze napięcia wyjściowego U przetwornika, którego minimalne i maksymalne wartości to odpowiednio -5 i $+5$ V.
4. Doświadczenie polega na rzucie monetą aż do momentu otrzymania orła.
   (a) Określić przestrzeń zdarzeń elementarnych.
   (b) Niech k – liczba rzutów potrzebnych do otrzymania pierwszego orła. Zdefiniujmy zdarzenia

$$
\begin{aligned}
A &= \{k : k \text{ jest liczbą pierwszą}\}\\
B &= \{k : 4 \leqslant k \leqslant 7\}\\
C &= \{k : 1 \leqslant k \leqslant 10\}
\end{aligned}
$$

   Wyznaczyć $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ oraz $\bar{A} \cap B$.
5. Pokazać, że $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$.
6. Wiedząc, że $P(A) = 0.9$, $P(B) = 0.8$ oraz $P(A \cap B) = 0.75$, określić $P(A \cup B)$, $PA \cap \bar{B})$ oraz $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

7. Doświadczenie polega na obserwacji sumy wyników rzutu dwoma kostkami. Określić prawdopodobieństwa otrzymania sumy większej od 10.

8. W pokoju znajduje się n osób.

   (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej dwie osoby urodziły się tego samego dnia roku? Obliczyć to prawdopodobieństwo dla $n = 50$.

   (b) Jak duże powinno być n, żeby wspomniane prawdopodobieństwo było większe od 0.5?

9. Z grupy 5 mężczyzn i 10 kobiet należy wybrać pięcioosobowy komitet.

   (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w komitecie znajdzie się dwóch mężczyzn i trzy kobiety?

   (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w komitecie znajdą się same kobiety?

10. Doświadczenie polega na rzucaniu monetą i zliczaniu rzutów potrzebnych do otrzymania po raz pierwszy orła.

    (a) Określić prawdopodobieństwo otrzymania orła w k-tym rzucie $P(X = k)$.

    (b) Pokazać, że $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$.

11. Pokazać, że prawdopodobieństwo warunkowe $P(A \mid B)$ spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa, tzn.

    (a) $P(A \mid B) \geqslant 0$,

    (b) $P(\Omega \mid B) = 1$,

    (c) $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$ jeżeli $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

12. Dwa zakłady produkują ten sam produkt. Zakład 1 wyprodukował 1000 szt., z których 100 jest uszkodzonych. Zakład 2 wyprodukował 2000 szt., z których 150 jest uszkodzonych. Wybrano losowo jedną sztukę towaru i stwierdzono, że jest uszkodzona. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi z pierwszego zakładu?

13. Wśród 100 tranzystorów 20 jest uszkodzonych. Wybrano losowo dwa tranzystory (bez zwracania).

    (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy z nich jest uszkodzony?

    (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugi jest uszkodzony, o ile wiadomo, że pierwszy był uszkodzony?

    (c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że obydwa tranzystory są uszkodzone?

14. Wybrano losowo liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Wiedząc, że ta liczba jest parzysta, określić prawdopodobieństwo, że jest podzielna przez 3 lub 5.

15. Dla testu mającego wykrywać pewną chorobę określa się następujące zdarzenia losowe:

    A – testowana osoba jest chora,

    B – test daje rezultat pozytywny (tzn. wskazuje chorobę).

    Wiadomo, że
    $$P(B \mid A) = 0.99, \quad P(B \mid \bar{A}) = 0.005$$
    oraz że 0.1% populacji jest chore. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dana osoba jest chora, o ile test jest pozytywny?

16. Rozważmy doświadczenie polegające na dwukrotnym rzucie kostką. Niech A oznacza zdarzenie, że sumą oczek jest 7, B – zdarzenie, że sumą oczek jest 6, a C – zdarzenie, że na pierwszej kostce wypadły 4 oczka. Pokazać, że zdarzenia A i C są niezależne, ale za to zdarzenia B i C są zależne.