Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

Ćwiczenia z metod matematycznych w technice

Liczby, zbiory, funkcje (cz. 1)

1. Metodą indukcji pokazać prawdziwość następujących wzorów:

   (a) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   (b) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$;

   (c) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$;

   (d) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

2. Udowodnić, że jeżeli $x>-1$, to zachodzi nierówność

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad (n>1)$$

   przy czym znak równości ma miejsce tylko dla $x=0$.

3. Udowodnić nierówność

$$|x-y| \geqslant ||x|-|y||.$$

4. Rozwiązać nierówności

   (a) $|x+1|<0.01$, (b) $|x-2|\geqslant 10$, (c) $|x|>|x+1|$,
   (d) $|2x-1|<|x-1|$, (e) $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$, (f) $|x+2|-|x|>1$,
   (g) $||x+1|-|x-1||<1$, (h) $|x(1-x)|<0.05$.

5. Udowodnić tożsamość

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

6. Określić dziedziny poniższych funkcji:

   (a) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$, (b) $y=\arccos(2\sin x)$,
   (c) $y=\sqrt{3x-x^3}$, (d) $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$,
   (e) $y=(x+|x|)\sqrt{x\sin^2(\pi x)}$, (f) $y=\operatorname{ctg}(\pi x)+\arccos(2^x)$,
   (g) $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$, (h) $y=\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$.

7. Zdefiniujmy funkcję

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{jeżeli } x<0,\\ 0 & \text{jeżeli } x=0,\\ 1 & \text{jeżeli } x>0.\end{cases}$$

   Narysować jej wykres oraz pokazać, że

$$|x|=x\operatorname{sgn}(x).$$

8. Funkcję $y=\lfloor x\rfloor$ określa się następująco: jeśli $x=n+r$, gdzie n — liczba całkowita oraz $0\leqslant r<1$, to $\lfloor x\rfloor=n$. Narysować wykres tej funkcji.

9. Niech
$$y = \pi(x) \qquad (x \geqslant 0)$$
oznacza liczbę liczb pierwszych nie przekraczających x. Narysować wykres tej funkcji dla wartości argumentu $0 \leqslant x \leqslant 20$.

10. Określić przeciwdziedziny poniższych funkcji dla zadanych dziedzin $\mathcal{D}$:
$$\begin{aligned} &y = x^2, && \mathcal{D} = \{-1 \leqslant x \leqslant 2\}, \\ &y = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(x), && \mathcal{D} = \{-\infty < x < \infty\}, \\ &y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{4}\right), && \mathcal{D} = \{0 < |x| \leqslant 1\}, \\ &y = |x|, && \mathcal{D} = \{1 \leqslant |x| \leqslant 2\}. \end{aligned}$$

11. Znaleźć $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ jeżeli
$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

12. Znaleźć $f(0.9)$, $f(0.99)$, $f(0.999)$, $f(1)$ jeżeli
$$f(x) = 1 + \lfloor x \rfloor.$$

13. Znaleźć $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ jeżeli
$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{dla } x \leqslant 0, \\ 2^x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

14. Znaleźć $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f(1/x)$, $1/f(x)$ jeżeli
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

15. Znaleźć wartości x, dla których (i) $f(x) = 0$, (ii) $f(x) > 0$, (iii) $f(x) < 0$, jeżeli
$$\text{(a) } f(x) = x - x^3, \qquad \text{(b) } f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), \qquad \text{(c) } f(x) = (x + |x|)(1 - x).$$

16. Znaleźć
$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
jeżeli (a) $f(x) = ax + b$, (b) $f(x) = x^2$, (c) $f(x) = a^x$.

17. Znaleźć wartości nieznanych współczynników funkcji
$$f(x) = ax + b$$
jeżeli wiadomo, że $f(0) = -2$ oraz $f(3) = 5$. Określić wartości $f(1)$ i $f(2)$.

18. Znaleźć wartości nieznanych współczynników funkcji
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
jeżeli wiadomo, że $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$ oraz $f(1) = 5$. Określić wartości $f(-1)$ i $f(0.5)$.

19. Funkcja $f(u)$ jest określona dla $0 < u < 1$. Znaleźć obszary określoności funkcji
$$\text{(a) } f(\sin(x)), \qquad \text{(b) } f\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x}\right).$$

20. Znaleźć $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ oraz $\psi[\varphi(x)]$ jeżeli
   (a) $\varphi(x) = x^2$ oraz $\psi(x) = 2^x$,
   (b) $\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)$ oraz $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$,
   (c) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ x & \text{dla } x > 0, \end{cases}$ oraz $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ -x^2 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$