

Ćwiczenia z metod matematycznych w technice

Funkcje (cz. 2), układy równań

1. Znaleźć $f(x)$ jeżeli

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2.$$

2. Znaleźć $f(x)$ jeżeli

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad (|x| \geq 2).$$

3. Znaleźć $f(x)$ jeżeli

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}, \quad (x > 0).$$

4. Znaleźć $f(x)$ jeżeli

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2.$$

5. Pokazać, że poniższe funkcje są rosnące w podanych przedziałach:

- (a) x^2 ($0 \leq x < +\infty$),
- (b) $\sin(x)$ ($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$),
- (c) $\operatorname{tg}(x)$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$),
- (d) $2x + \sin(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

6. Pokazać, że poniższe funkcje są malejące w podanych przedziałach:

- (a) x^2 ($-\infty \leq x \leq 0$),
- (b) $\cos(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$),
- (c) $\operatorname{ctg}(x)$ ($0 < x < \pi$).

7. Zbadać monotoniczność następujących funkcji:

(a) $f(x) = ax + b$, (b) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, (c) $ax^2 + bx + c$, (d) x^3 .

8. Znaleźć funkcje odwrotne $x = \varphi(y)$ i ich dziedziny, jeżeli:

- (a) $y = 2x + 3$ ($-\infty < x < +\infty$),
- (b) $y = x^2$ (i) $-\infty < x \leq 0$, (ii) $0 \leq x < +\infty$,
- (c) $y = \frac{1-x}{1+x}$ ($x \neq -1$),
- (d) $y = \sqrt{1-x^2}$ (i) $-1 \leq x \leq 0$, (ii) $0 \leq x \leq 1$,
- (e) $y = \begin{cases} x & \text{jeżeli } -\infty < x < 1, \\ x^2 & \text{jeżeli } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$

9. Narysować wykresy funkcji liniowych:

(a) $y = 2x + 3$, (b) $y = 2 - 0.1x$, (c) $y = -\frac{x}{2} - 1$.

10. Narysować wykresy poniższych funkcji:

- (a) $y = ax^2$ dla $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$,
 (b) $y = (x - x_0)^2$ dla $x_0 = 0, 1, 2, -1$,
 (c) $y = x^2 + c$ dla $c = 0, 1, 2, -1$.

11. Narysować wykres trójmianu kwadratowego

$$y = ax^2 + bx + c,$$

sprowadzając go do postaci

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2.$$

Rozważyć następujące przykłady:

- (a) $y = 8x - 2x^2$, (b) $y = -x^2 + 2x - 1$,
 (c) $y = x^2 - 3x + 2$, (d) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

12. Narysować wykresy poniższych funkcji:

- (a) $y = x^3 + 1$, (b) $y = x^2 - x^4$, (c) $y = (1 - x^2)(2 + x)$,
 (d) $y = \frac{1}{x}$, (e) $y = \frac{1 - x}{1 + x}$, (f) $y = \frac{3x + 2}{2x - 3}$,
 (g) $y = x + \frac{1}{x}$, (h) $y = \frac{1}{1 + x^2}$, (i) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

13. Rozwiązać następujące układy równań, ilustrując rozwiązania wykresem:

- (a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

14. Rozwiązać układy równań

- (a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 20 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ 3x - y + z = 11 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x - y = 4 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$

15. Znaleźć wszystkie punkty przecięcia okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt{2}$ z prostą o równaniu $y = -x + 2$.

16. Rozwiąż układy równań

- (a) $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

17. Znaleźć punkty przecięcia okręgów o środkach w punktach $(2, 1)$ i $(1, -1)$ oraz promieniach odpowiednio 2 i 1.