

Ćwiczenia z metod matematycznych w technice

Funkcja wykładnicza, logarytm, funkcje wymierne

1. Uprościć poniższe wyrażenia

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & 3^7 3^{-4}, & \text{(b)} & (2^2)^{-1}, & \text{(c)} & (3r^2)^4, & \text{(d)} & \frac{2^{-4} \cdot 2^3}{2^2 \cdot 2^6}, \\ \text{(e)} & (3x)^2, & \text{(f)} & (3x^2)(5x^4), & \text{(g)} & -3^2, & \text{(h)} & \frac{10^5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^6}{10^5 \cdot 10^{-7}}, \\ \text{(i)} & \frac{a^5 \cdot b^{-3}}{a^4 \cdot b^{-7}}, & \text{(j)} & \left(\frac{3x^{-2}}{y^4}\right)^{-3}, & \text{(k)} & \frac{(4m^{-1})^{-1}}{2m^2}, & \text{(l)} & \frac{5^{-2} x^2 y^{-1}}{5x^{-1} y^{-3}}, \\ \text{(m)} & \sqrt{25x^3}, & \text{(n)} & \sqrt{16x^5}, & \text{(o)} & \frac{3x}{\sqrt{x}}, & \text{(p)} & \frac{\sqrt{25x^2 y^2}}{\sqrt{x}}, \\ \text{(q)} & \sqrt{x^2 y^3 z^5}, & \text{(r)} & \sqrt{u^2 v^4}, & \text{(s)} & \sqrt{2x^2 y^5}, & \text{(t)} & \sqrt{z^7}. \end{array}$$

2. Wyznaczyć wartości

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & 8^{4/3}, & \text{(b)} & 8^{-4/3}, & \text{(c)} & (-8)^{4/3}, & \text{(d)} & (-8)^{5/2}, \\ \text{(e)} & 4^{5/2}, & \text{(f)} & 2^{5/2}, & \text{(g)} & \sqrt{45}, & \text{(h)} & \sqrt[3]{54}. \end{array}$$

3. Wskazać niepoprawność poniższego rozumowania:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = [(-1)^{1/2}]^2 = -1.$$

4. Rozwiązać poniższe równania

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & e^x = 5, & \text{(b)} & e^{2x} = 10, & \text{(c)} & e^{5x} = 50, & \text{(d)} & e^{-x} = 0.5, \\ \text{(e)} & 5e^t = 20, & \text{(f)} & 50e^{0.08t} = 1000, & \text{(g)} & 50e^{-0.2t} = 5. \end{array}$$

5. Uprościć poniższe funkcje wymierne:

$$\text{(a)} \quad \frac{x^5 - x^3 + 2x^2 - 2}{x^3 + 2}, \quad \text{(b)} \quad \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}, \quad \text{(c)} \quad \frac{6x^4 - 7x^3 + 10x - 23}{3x^2 - 2x + 5}.$$

6. Rozłożyć na czynniki poniższe wielomiany:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & x^2 - 9, & \text{(b)} & 16x^4 - 25, & \text{(c)} & x^2 + 5x + 6, \\ \text{(d)} & x^2 - x - 12, & \text{(e)} & x^3 + 8, & \text{(f)} & x^3 - 27, \\ \text{(g)} & 8x^3 - 27a^6 & \text{(h)} & 27x^3 + 1, & \text{(i)} & 2x^3 + 8x^2 - 3x - 12, \end{array}$$

7. Zapisać jako jeden ułamek, który należy następnie skrócić:

$$(a) \frac{1}{x} + \frac{x}{2}, \quad (b) \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{3}, \quad (c) \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x+2},$$

$$(d) \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x}{x+3}, \quad (e) \frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-4)}, \quad (f) \frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$$

8. Rozwiązać nierówności

$$(a) \frac{x^2 - x - 4}{x - 1} \leq 1, \quad (b) \frac{x^2 - 2x - 8}{x} < 0, \quad (c) \frac{(x+2)(x-3)}{x-1} > 0,$$

$$(d) \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{x-2}, \quad (e) \frac{2}{x} + \frac{x}{2} < 2, \quad (f) \frac{x+4}{x} < \frac{x}{2}.$$