Wydział Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji
Uniwersytet Zielonogórski
Materiały na seminarium doktoranckie

Planowanie i technika eksperymentu

Niepewność pomiarów – podejście statystyczne

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Model odpowiedzi obiektu ma postać

$$\eta(x_i, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

przy czym parametry β_0 i β_1 są nieznane. Obserwacje odpowiedzi mają postać

$$y_i = \eta(x_i, \beta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

gdzie: ε_i – składowa losowa (błąd) o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji σ^2. Oznaczając

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix},$$

ocenę $\hat{\beta}$ parametru β wg metody najmniejszych kwadratów otrzymuje się rozwiązując układ równań normalnych

$$F^T F \hat{\beta} = y,$$

w którym występuje macierz $M = F^T F$, nazywana *macierzą informacyjną*. Jeżeli błędy ε_i, $i = 1, \ldots, N$ są realizacjami ciągu niezależnych zmiennych losowych, to zachodzi

$$\mathrm{E}[\hat{\beta}] = \beta, \quad \mathrm{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (F^T F)^{-1}.$$

Mając ocenę $\hat{\beta}$ można następnie dokonać predykcji odpowiedzi wg formuły

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = f^T(x)\hat{\beta},$$

gdzie: $f^T(x) = [1, x]$. Wariancja predykcji ma postać

$$\mathrm{var}\{\hat{y}(x)\} = \sigma^2 f^T(x)(F^T F)^{-1} f(x),$$

przy czym często stosuje się jej postać unormowaną

$$d(x, \xi) = N \frac{\mathrm{var}\{\hat{y}(x)\}}{\sigma^2}$$

(ξ oznacza plan eksperymentu, czyli zestaw punktów, w których wykonuje się obserwacje).

(a) Pokażać, że zachodzi

$$F^T F = \begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}, \quad (F^T F)^{-1} = \frac{1}{\det(F^T F)} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & N \end{bmatrix}.$$

(b) Obszarem planowania jest zbiór $X = [-1, 1]$. Porównać plany trójpunktowe

$$\xi_1 = \{-1, 0, 1\}, \quad \xi_2 = \{-1, 1, 1\}$$

Wykorzystać w tym celu kryteria D-optymalności (wartość $\det(F^T F)$ powinna być jak największa) oraz G-optymalności (maksymalna wartość unormowanej wariancji $d(x, \xi)$ powinna być jak najmniejsza). W ostatnim przypadku narysować również odpowiednie wykresy.

2. Analogicznie do Zadania 1, dla modelu postaci

$$\eta(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

porównać plany

$$\xi_1 = \{-1, 0, 1\}, \quad \xi_2 = \{-1, -1/3, 1/3, 1\}.$$

Uniezależnić rezultaty od liczby punktów planu.

3. W modelu z Zadania 1 przyjąć $\hat{\beta} = [16, 7.5]$ i narysować elipsoidy ufności określone równaniem

$$(\beta - \hat{\beta})^T F^T F (\beta - \hat{\beta}) = 1$$

oraz wykresy unormowanych wariancji predykcji $d(x, \xi)$ dla planów

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \{-1, 0, 1\}, \\
\xi_2 &= \{-1, -1, 0, 0, 1, 1\}, \\
\xi_3 &= \{-1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1\}, \\
\xi_4 &= \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}, \\
\xi_5 &= \{-1, -1, -0.9, -0.85, -0.8, -0.75, 1\}, \\
\xi_6 &= \{-1, 1\}.
\end{aligned}$$

Jak wpływa na rezultaty liczba obserwacji? Kiedy otrzymuje się diagonalną macierz informacyjną? Jaki wpływa skupienie punktów planu w jednym podobszarze na przebieg wariancji?

Narysować wykresy wariancji predykcji dla modelu kwadratowego z zadania 2 i planów

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}, \\
\xi_2 &= \{-1, -1, -0.9, -0.85, -0.8, -0.75, 1\}, \\
\xi_3 &= \{-1, -1, 0, 1\}, \\
\xi_4 &= \{-1, 0, 0, 1\}.
\end{aligned}$$