Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Politechnika Zielonogórska

Metody i techniki optymalizacji

Metoda mnożników Lagrange'a; pakiet Lingo

Przed rozpoczęciem ćwiczenia należy zapoznać się z funkcją `fsolve` znajdującą się w Matlabie. Posłuży ona do określenia rozwiązań numerycznych zadań z poniższej listy. Wyniki zweryfikować z zastosowaniem programu **Lingo** (wersja instalacyjna dostępna jest na stronie internetowej z instrukcjami do ćwiczeń lub bezpośrednio na stronie `www.lindo.com` firmy Lindo Systems Inc.). Spróbować również zweryfikować rezultaty z zastosowaniem modułu `Solver` programu `Excel`.

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Rozdzielić dzienną produkcję energii 100 MWh między dwie elektrownie, tak aby dzienne koszty zużycia paliwa (w tys. zł) opisane funkcją

$$f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2$$

gdzie x_1 — zużycie paliwa w elektrowni I, x_2 — zużycie paliwa w elektrowni II, były możliwie najniższe. Wiadomo ponadto, że z 1 tony paliwa w elektrowni I uzyskuje się 5 MWh energii, a w elektrowni II — 3 MWh. Podać dzienne koszty zużycia paliwa w tych elektrowniach.

2. Dwie olejarnie o zdolnościach przerobowych 10 t i 15 t ziarna dziennie mają przerobić 1800 ton ziarna na olej. Straty oleju w ziarnie zależą od stosowanych procesów technologicznych uzysku oleju z surowca. Funkcja łączonych strat oleju w ziarnie (w kg) dla obydwu olejarni dana jest wzorem

$$f(t_1, t_2) = t_1^2 + 20t_1 + 3t_2^2 + 45t_2$$

gdzie t_1 i t_2 to czasy trwania kampanii odpowiednio w pierwszej i drugiej olejarni. Jak długo powinny trwać kampanie w I i II olejarni, aby straty oleju w ziarnie były możliwie najmniejsze?

3. Planowane są prace modernizacyjne w trzech kopalniach. Rezultatem tych prac ma być łącznie 15 tys. ton przyrostu dziennego wydobycia. Koszty prac modernizacyjnych w zależności od planowanego przyrostu wydobycia w poszczególnych kopalniach (odpowiednio x_1, x_2, x_3) wyraża funkcja

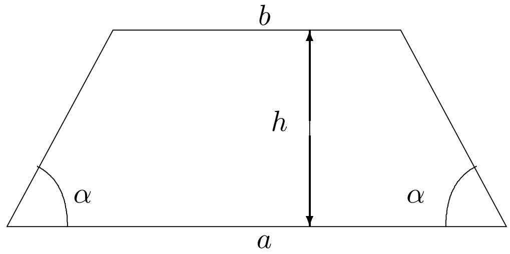
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 14$$

Zaplanować wielkości przyrostu wydobycia dla poszczególnych kopalń, tak by koszty prac modernizacyjnych były możliwie najniższe. Podać wysokość tych kosztów.

4. W pewnej firmie prowdzącej działalność produkcyjną wyszacowano zależność między wielkością produkcji (y) w mln zł a nakładami wyrażonymi również w mln zł, którą przedstawia funkcja

$$y = -x_1^2 x_2 + 16x_1 + 3x_2$$

a funkcja kosztów przyjmuje postać $C(x) = x_1 + x_2$. Ponadto wiadomo, że łączne nakłady nie mogą przekroczyć 8. Określić optymalne wielkości nakładów dające możliwie najwyższą produkcję. Podać rozmiary tej produkcji.



Rysunek 1: Przekrój belki z zadania 10.

5. Obliczyć odległość punktu $(1, 2)$ od prostej o równaniu

$$2x_1 + 3x_2 = 1.$$

6. Określić wymiary prostopadłościanu o maksymalnej objętości, wpisanego w elipsoidę o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Jakie będą te wymiary w przypadku $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$?

7. Określić (x, y, z) tak, aby zmaksymalizować $xy + 2xz + 3yz$ przy warunku $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

8. Znaleźć punkty stacjonarne funkcji $F(x, y, z) = xy^2z^3$ przy ograniczeniu $x + y + z = 6$.

9. Znaleźć minimalną odległość między elipsą określoną równaniem

$$\frac{\bar{x}^2}{2^2} + \frac{\bar{y}^2}{1} = 1,$$

gdzie:

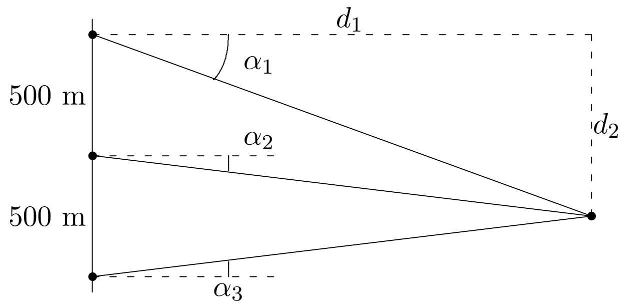
$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \theta = 30^\circ,$$

oraz elipsą daną wzorem

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

10. Metalowa belka ma przekrój w kształcie trapezu (zob. rys. 1). Pole przekroju belki wynika z wymagań wytrzymałościowych konstrukcji i ma wynosić S. Górną i boczne powierzchnie belki pokrywa się kosztownym materiałem antykorozyjnym. Należy określić parametry przekroju tak, aby koszt zabezpieczenia antykorozyjnego był minimalny.

11. Statek znajdujący się na morzu jest obserwowany z trzech stacji leżących na jednej prostej w odległościach co 500 m. W każdej ze stacji dokonuje się pomiaru kąta α_i, $i = 1, 2, 3$, między linią łączącą stację z obserwowanym obiektem a prostopadłą do linii łączącej poszczególne punkty obserwacyjne (rys. 11). Otrzymane wyniki pomiarów są obarczone błędami i wynoszą: $\tilde{\alpha}_1 = 0.083$ rad, $\tilde{\alpha}_2 = 0.024$ rad, $\tilde{\alpha}_3 = -0.017$ rad. Należy skorygować wyniki określające kąty



Rysunek 2: Określanie położenia statku z zadania 11.

α_1, α_2 i α_3 w taki sposób, aby były one zgodne, tzn. aby odpowiadające im proste przecinały się w jednym punkcie i aby suma kwadratów różnic między kątami α_i a wynikami pomiarów $\tilde{\alpha}_i$ była minimalna. Określiwszy te kąty, należy oszacować położenie statku. Z uwagi na małe wartości kątów α_1, α_2 i α_3 można zastosować przybliżenia $\operatorname{tg} \alpha_i \approx \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$.

12. Funkcję $g(x)$ daną tabelarycznie należy aproksymować wielomianem $p(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $1 \leqslant x \leqslant 5$. Wartości $g(x)$ przedstawia tabela:

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	3	5	4	2	1

Dla $x = 1$ wymaga się dodatkowo spełnienia warunku $p(1) = g(1)$, czyli

$$a + b + c = 3.$$

Z uwzględnieniem tego ograniczenia, określić wartości a, b i c minimalizujące kryterium

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{5} \big[p(i) - g(i)\big]^2.$$

13. Rozważmy zmienną losową ciągłą X o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Należy znaleźć najkrótszy przedział (a, b), dla którego prawdopodobieństwo znalezienia się w nim realizacji X wynosi 95%. Pokazać, że prowadzi to do warunków

$$f(a) = f(b), \quad P\{a < X < b\} = 0.95.$$

Określić wartości liczbowe a i b. Czy ten rezultat da się uogólnić na inne rozkłady?

14. Znaleźć punkt najbliższy początkowi układu współrzędnych na linii prostej określonej równaniami

$$x + 2y + 3z = 10, \quad x - y + 2z = 1.$$

15. Rozwiązać problem

$$x_1 x_2 x_3 \to \min, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

16. Rozwiązać problem

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \min, \quad x_1^2 + x_2^2 = 2, \quad x_2 + x_3 = 2.$$