Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Politechnika Zielonogórska

Laboratorium Metod i Technik Optymalizacji

Metody minimalizacji jednowymiarowej

Wszystkie programy wymagane w ćwiczeniu powinny być napisane w wybranym przez siebie środowisku. Sam program ćwiczenia obejmuje natomiast następujące zadania:

1. Napisać program wyznaczający minimum funkcji metodą złotego podziału. Przy jego pomocy wyznaczyć najmniejsze i największe wartośći następujących funkcji

a)	$f(x) = 2^x$	w przedziale [-1; 5],
b)	$f(x) = x^2 - 4x + 6$	w przedziale [-3; 10],
c)	$f(x) = \lvert x^2 - 3\,x + 2\rvert$	w przedziale [-10; 10],
d)	$f(x) = x + x^{-1}$	w przedziale [0.01; 10],
e)	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	w przedziale [-1; 2],
f)	$f(x) = \left(1 - e^x \sin(x)\right)^2$	w przedziale [-10;1],
g)	$f(x) = -e^{-x} \ln(x)$	w przedziale [1;3],
h)	$f(x) = -\sin(x)/x$	w przedziale $[\pi; 2\pi]$,
i)	$f(x) = 5 - 5\,e^{-x} - 5\,xe^{-x} - x$	dla $x \geqslant 0$.

   Przetestować również działanie programu dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-2.5)^2 & \text{gdy} \quad x < 0 \quad \text{lub} \quad x > 5 \\ 10 - x^2 & \text{gdy} \quad 0 \leqslant x < 3 \\ 1 + (x-3)^2 & \text{gdy} \quad 3 \leqslant x < 5 \end{cases}$$

   w przedziale $[-1; 6]$. Czy można w tym ostatnim przypadku zastosować metodę Newtona? Czy można stosować metodę Newtona w przypadku poniższej funkcji?

$$f(x) = \begin{cases} 4\,x^3 - 3\,x^4 & \text{gdy} \quad x \geqslant 0 \\ 4\,x^3 + 3\,x^4 & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

2. Dla metody złotego podziału określić liczbę wywołań funkcji niezbędną do osiągnięcia przedziału poszukiwań równego odpowiednio 0.1, 0.01, 0.001 i 0.0001 długośći przedziału początkowego.

3. Napisać program wyznaczający minimum funkcji metodą interpolacji kwadratowych. Przetestować jego działanie na przykładach z poprzedniego zadania.

   Zapoznać się z funkcją MATLABa `fmin`. Jaki algorytm został w tym przypadku zimplementowany?

4. Większość metod minimalizacji w kierunku wymaga podania przedziału poszukiwań minimum funkcji. W związku z tym zaproponować efektywny sposób wyznaczania takiego przedziału. Sprawdzić jego działanie poprzez napisanie odpowiedniego programu.

5. Pokazać w jaki sposób omawiane w ćwiczeniu metody można zastosować do poszukiwania punktu, w którym dana funkcja przyjmuje wartość zerową. Znaleźć w ten sposób miejsce zerowe funkcji $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

6. Rozważmy funkcję $f(x) = (x_1^3 + x_2)^2 + 2(x_2 - x_1 - 4)^4$. Zadajmy punkt x^0 i niezerowy wektor kierunku d. Niech $g(\lambda) = f(x^0 + \lambda d)$.

(a) Wyznaczyć jawne wyrażenie na $g(\lambda)$.

(b) Dla $x^0 = (0,0)^T$ i $d = (1,1)^T$, stosując metodę złotego podziału, określić punkt minimum funkcji $g(\lambda)$.

(c) Dla $x^0 = (4,5)^T$ i $d = (1,-2)^T$, stosując metodę interpolacji kwadratowych, określić punkt minimum funkcji $g(\lambda)$.

7. Rozważmy zadanie minimalizacji $f(x + \lambda d)$ przy warunku $\lambda \in \mathcal{R}$. Pokazać, że równość $d^T \nabla f(y) = 0$ jest warunkiem koniecznym istnienia minimum w punkcie $\bar{\lambda}$, gdzie $y = x + \bar{\lambda} d$. Przy jakich założeniach jest to również warunek wystarczający?

   Zastosować metodę Newtona do minimalizacji funkcji $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ na prostej $x^0 + \lambda d$, gdzie $x^0 = (1,1)^T$ i $d = (2,3)^T$.

8. Zakład planuje w tym roku pożyczyć x dolarów na rozwój, a następnie zwracać pieniądze równymi rocznymi ratami przez najbliższych K lat. Roczna stopa procentowa pożyczki r_1 zależy od pożyczanej kwoty wg formuły $r_1 = k_0 + k_1 x$, gdzie k_0 i k_1 są pewnymi stałymi. Pieniądze zarobione w wyniku rozwoju mogą być zainwestowane przez zakład ze stałą roczną stopą procentową r_2. Całkowity przewidywany dochód z rozwoju po K latach wynosi $c_1(1 - e^{-c_2 x})$, gdzie c_1 i c_2 są stałymi. Roczna spłata kredytu pożyczkodawcy jest równa

$$\left[\frac{r_1(1+r_1)^K}{(1+r_1)^K - 1}\right] x$$

   Całość splaty po K latach po uwzględnieniu stopy procentowej r_2 wynosi

$$\left[\frac{(1+r_2)^K - 1}{r_2}\right] \left[\frac{r_1(1+r_1)^K}{(1+r_1)^K - 1}\right] x$$

   Maksymalizacji podlega całkowity zysk z:

$$z = c_1(1 - e^{-c_2 x}) - \left[\frac{(1+r_2)^K - 1}{r_2}\right] \left[\frac{r_1(1+r_1)^K}{(1+r_1)^K - 1}\right] x$$

   Dla prostoty pominąć kwestie podatku. Użyć wybranej metody do określenia optymalnej kwoty pożyczki po przyjęciu, że

$$K = 10, \quad c_1 = 4 \times 10^5\,\$, \quad c_2 = \frac{1}{10^5\,\$}, \quad k_0 = 0.05, \quad k_2 = \frac{2}{10^7\,\$}, \quad r_2 = 0.05$$

   Zaproponować odpowiedni sposób przeskalowania x i z.