

Interpolacja

Zakres materiału

- Definicja zadania interpolacji.
- Podstawowe typy interpolacji. Interpolacja liniowa (wielomianowa i trygonometryczna) i nieliniowa (wymierna, funkcjami sklejanymi, algorytm „najbliższego sąsiada”).
- Algorytmy interpolacji wielomianowej:
 - baza jednomianowa,
 - baza Lagrange’a,
 - baza Newtona.
- Błąd interpolacji wielomianowej.
- Interpolacja funkcjami sklejanymi.
- Zadanie ekstrapolacji. Błąd ekstrapolacji.
- Zapoznać się z przygotowanymi funkcjami `interL` i `interN` realizującymi interpolację odpowiednio metodami Lagrange’a i Newtona oraz następującymi funkcjami Matlab’a:
 - `spline` – interpolacja splajnami kubicznymi,
 - `interp1` – tabelaryzacja funkcji 1 zmiennej wybranymi metodami (alg. „najbliższego sąsiada”, splajnami liniowymi i kubicznymi),
 - `interp2` – tabelaryzacja funkcji 2 zmiennych,
 - `polyval` – ewaluacja wartości wielomianu,
 - `ppval` – ewaluacja wartości funkcji sklejanej.

Zadania

1. a) Stosując metody Lagrange’a i Newtona zbudować wielomian interpolacyjny 4-go stopnia dla następującej tablicy:

x	0.0	0.1	0.3	0.6	1.0
$f(x)$	-6.00000	-5.89483	-5.65014	-5.17788	-4.28172

- b) Do tablicy dodać nowy punkt $f(1.1) = -3.99583$ i zbudować wielomian interpolacyjny 5-go stopnia. Porównać efektywność działania procedur w punktach a) i b) poprzez pomiar czasu.

2. Stosując metody Lagrange’a i Newtona obliczyć:

a) $f(2.5)$ dla $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^5 = \{(2.0, 0.5103757), (2.2, 0.5207843), (2.4, 0.5104147), (2.6, 0.4813306), (2.8, 0.4359160)\}$

b) $f(0.5)$ dla $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^5 = \{(0.2, 0.9798652), (0.4, 0.9177710), (0.6, 0.800348), (0.8, 0.6386093), (1.0, 0.3843735)\}$

Potwierdzić wyniki interpolacji poprzez narysowanie odpowiednich wykresów.

3. Napisać prostą funkcję MATLAB-a, która znajdzie współczynniki wielomianu interpolacyjnego na drodze rozwiązania układu równań wynikającego z definicji zadania interpolacji. Następnie sprawdzić działanie skryptu na bazie zadania 2.
4. Dane są 3 punkty $P_1(1, 0)$, $P_2(3, 3)$, $P_3(4, 1)$. Znaleźć wielomian interpolacyjny:
 - a) posiadający w każdym z nich punkt ekstremalny lub punkt przegięcia,

- b) który w pierwszym i trzecim punkcie posiada punkt minimum a w drugim maksimum,
- c) przyjmujący w pierwszych dwóch punktach maksimum, a trzeci punkt to punkt przegięcia,
- d) który jest funkcją ściśle rosnącą w każdym z punktów.

Sprawdzić wyniki poprzez narysowanie odpowiedniego wykresu. Jaki jest minimalny stopień takiego wielomianu?

5. Populacja ludności w USA od 1930 do 1980 wynosiła (w mln):

rok	1930	1940	1950	1960	1970	1980
ludność	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212	226.505

Wyznaczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a 5-go stopnia używając powyższych danych. Wykorzystaj powyższy wielomian do oceny populacji w latach 1920, 1965 i 2000. Wiedząc, że populacja w 2006 roku wyniosła 300 mln, dokonać oszacowania błędu oceny populacji w 1965 oraz w 2000 roku? Następnie, dokonać interpolacji splajnami liniowymi oraz kubicznymi i porównać otrzymane rezultaty.

6. Energię elektronu poruszającego się w polu magnetycznym w zależności od czasu zestawiono w poniższej tabeli:

t ns	E MeV
0	0.0094
3	3.6121
7	2.3129
8	21.3123
14	17.7840
19	8.3185
26	12.5968
30	29.0132

Zastosować interpolację funkcjami sklejanymi. Użyć wielomianów stopnia 1 i 3, a następnie z użyciem alg. „najbliższego sąsiada”. Ocenic jakość interpolacji w zależności od stopnia splajnów oraz w odniesieniu do wielomianu Lagrange'a.

7. Interpolacja jest często wykorzystywana w grafice komputerowej. Napisać prosty skrypt, który wygeneruje równomierną siatkę prostokątną o zadanych wymiarach oraz wylosuje wartości funkcji w punktach siatki. Następnie dokonać interpolacji splajnami biliniowymi oraz bikubicznymi. Porównać wyniki na wykresach.