Uniwersytet Zielonogórski

Laboratorium Metod Numerycznych

# Równania nieliniowe

## Zakres materiału

- Zagadnienie izolacji różnych pierwiastków równań nieliniowych (tzw. *bracketing*).
- Algorytmy numerycznego szukania miejsc zerowych funkcji jednej zmiennej:
  - metoda punktu ustalonego,
  - metoda bisekcji,
  - metoda Newtona-Raphsona (stycznych),
  - metoda siecznych,
  - metoda cięciw,
  - metoda reguły falsi (fałszywej pozycji).

  Dla każdego z w/w algorytmów należy zapoznać się z:
  - założeniami wstępnymi poprawnego działania,
  - regułą iteracyjną,
  - warunkami jakościowymi i ilościowymi STOP-u,
  - interpretacją graficzną,
  - typem zbieżności algorytmów.
- Pierwiastki wielokrotne.
- Metoda Newtona rozwiązywania układów wielu równań nieliniowych.
- Zapoznać się z załączonymi procedurami MATLAB-a rozwiązującymi równania nieliniowe z zastosowaniem metody Newtona (`newton.m`), bisekcji (`bisect.m`), falsi (`falsi.m`), cięciw (`chord.m`) oraz siecznych (`secant.m`).

## Zadania

1. Korzystając z metody Newtona znaleźć przybliżenia następujących wartości
   a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{10}$, c) $\sqrt[3]{8}$, d) $\sqrt[3]{13}$, e) $\sqrt[3]{20}$, f) $\sqrt[4]{80}$
   Przyjąć dokładność $\varepsilon = 10^{-4}$. Wykonać wykres szybkości zbieżności (liczby iteracji) w zależności od dobranego punktu startowego (punkt startowy $x_0$ zmieniać w przedziale $[0, 50]$).
   **Wskazówka:** $\alpha = \sqrt[n]{c}, c \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \alpha$ jest rozwiązaniem równania nieliniowego $x^n - c = 0$.

2. Stosując metodę bisekcji (połowienia) rozwiązać następujące równania:

   a) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, b) $x = e^{-x}$, c) $x = 1 + 0{,}3\cos(x)$,
   d) $(x-1)\cos(x) = -2x$, e) $\sinh(x) + e^x = 2$, f) $\tanh(x) = -0{,}2\sin(x-2)$,

   Narysować wykres błędu bezwzględnego osiąganego w kolejnych krokach metody. Następnie zbadać zależność liczby potrzebnych iteracji od szerokości przedziału poszukiwań do osiągnięcia zadanej dokładności i zilustrować ją wykresem. W tym celu przyjąć dokładność $\varepsilon = 10^{-4}$ i maksymalny przedział poszukiwań równy $[\alpha-10, \alpha+10]$, gdzie $\alpha$ jest pierwiastkiem równania. Następnie sukcesywnie zmniejszać przedział poszukiwań.

3. Stosując metody siecznych, cięciw oraz oraz reguły falsi wyznaczyć:

   (a) dodatni pierwiastek równania $x^3 + x^2 - x = 1$
   (b) pierwiastek równania $2x = 1 + 0.4\cos(x)$,
   (c) najmniejszy dodatni pierwiastek równania $\cos(x) = \frac{1}{2} + \sin(x)$
   (d) ujemny pierwiastek równania $x^3 + x^2 + x = 1$
   (e) najmniejszy dodatni pierwiastek równania $e^{-x} = \sin(x)$.

(f) największy pierwiastek równania $\cosh(x) - 2\sin(x) = 0$.

Założyć dokładność rozwiązania na poziomie $\varepsilon = 10^{-8}$. Porównać skuteczność metod (wykres błędu w zależności od liczby iteracji).
**Uwaga:** dobrać odpowiedni przedział poszukiwań zapewniający zbieżność metod oraz wystarczająco ilustrujący różnice błędu w kolejnych iteracjach.

4. Zbadać zależność zbieżności do rozwiązania od punktu startowego dla metody Newtona i następujących wielomianów:

   a) $p(x) = 120x^4 - 154x^3 + 71x^2 - 14x + 1$
   b) $p(x) = 4x^5 + 16x^4 - 3x^3 - 61x^2 - 16x + 60$
   c) $p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$
   d) $p(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 12$
   e) $p(x) = 250x^4 + 275x^3 - 285x^2 - 116x + 32$
   f) $p(x) = 3x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 24x^2 + 48x - 48$

   W tym celu:

   - Nakreślić wykres badanej funkcji i na jego podstawie określić punkty startowe do wyznaczania pierwiastków wielomianu.
   - Znaleźć zbiór $S$ wszystkich rozwiązań rzeczywistych równania $p(x) = 0$.
   - Napisać krótki skrypt MATLAB-a wyznaczający tabelę 500 rozwiązań dla punktów startowych równomiernie rozmieszczonych w odpowiednio dobranym przedziale $[a, b] \supset S$. Założyć $\varepsilon = 10^{-6}$ i maksymalną liczbę iteracji równą 100. Następnie wykreślić wykres funkcji $\alpha = f(x_0)$, gdzie $\alpha \in S$ jest znalezionym pierwiastkiem wielomianu, a $x_0 \in \mathbb{R}$ punktem startowym.

5. Uogólniona reguła iteracyjna metody Newtona dla układów równań nieliniowych

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$$

   ma postać:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

   gdzie:

$$J(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

   jest macierzą Jacobiego funkcji $\boldsymbol{f}$.

   Dla podanych poniżej przykładów w zadaniu wyznaczyć macierze Jacobiego i korzystając z podanej formuły iteracyjnej napisać proste funkcje MATLAB-a znajdujące pierwiastki układów równań na podstawie podanego punktu startowego.

   a) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ \exp(x_1) = x_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin(x_1 + x_2) = 1 \\ \exp(x_2) = x_1 + x_2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_2 = x_1^2 + 1 \\ x_2 = 3\cos(x_1) \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ e^{x_1} = \sin(x_2) \end{cases}$

   Dokonać wizualizacji układu równań (wykres 3D) i na tej podstawie oszacować wartość pierwiastka. Następnie dla 4 wybranych punktów startowych (każdy w innej ćwiartce układu współrzędnych) znaleźć rozwiązanie (dokładność rozwiązania przyjąć $\varepsilon = 10^{-6}$). Wyznaczyć tabele kolejnych przybliżeń rozwiązania układu i przedstawić je w postaci wykresu.

6. Prędkość spadającego skoczka spadochronowego jest wyrażona wzorem

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-(c/m)t})$$

   gdzie: $g = 9{,}81$ m/s$^2$. Wyznaczyć masę skoczka $m$, jeżeli współczynnik oporu $c = 14$ kg/s, a prędkość $v$ po czasie $t = 7s$ wyniosła 35 m/s.

7. Model równowagi masy dla koncentracji zanieczyszczeń w dobrze wymieszanym jeziorze można zapisać w postaci równania
$$V\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = W - Qc - kV\sqrt{c}$$
Jeżeli objętość $V = 1 \cdot 10^6$ m$^3$, przepływ $Q = 1 \cdot 10^5$ m$^3$/s, $W = 1 \cdot 10^3$ kg/s i $k = 6{,}325$ m$^{0,5}$/kg$^{0,5}$/s to ile wynosi koncentracja $c$ w stanie ustalonym?

8. Następujące równanie odnosi się do koncentracji $c$ składnika chemicznego w jednorodnym reaktorze:
$$c = c_{\text{in}}(1 - e^{-0{,}04t}) + c_0 e^{-0{,}04t}$$
Jeżeli koncentracja początkowa $c_0 = 4$ i koncentracja dopływu $c_{\text{in}} = 10$, to ile wynosi czas potrzebny na osiągnięcie koncentracji równej 93% $c_{\text{in}}$?

9. Równanie Redlicha-Kwonga stanu gazu ma następującą formę:
$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{v(v+1)\sqrt{T}}$$
gdzie: $R = 0,518$ kJ/(kg·K) – uniwersalna stała gazowa, $T$– temperatura absolutna (w skali Kelvina), $p$ – ciśnienie (kPa) i $V$ – objętość gazu na 1 kg (m$^3$/kg). Współczynniki $a$ i $b$ można wyznaczyć następująco:
$$a = 0{,}427\frac{R^2 T_c^{5/2}}{p_c}, \qquad b = 0{,}0866R\frac{T_c}{p_c}$$
gdzie $p_c = 4600$ kPa i $T_c = 191$ K. Wyznaczyć ilość metanu, która może być trzymana w zbiorniku o objętości 3 m$^3$ w temperaturze $-40$°C pod ciśnieniem 65000 kPa.

10. W oceanografii, równanie odbitej fali stojącej w zatoce jest opisane następująco ($\lambda = 16, t = 12, v = 48$):
$$h = h_0\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi t v}{\lambda}\right) + e^{-x}\right]$$
Znaleźć najmniejszą dodatnią współrzędną położenia węzła ($h = 0$) oraz strzałki ($h = h_0$) fali stojącej.

11. Trajektorię lotu piłki wyrzuconej przez zawodnika można zamodelować parabolą
$$y = x\tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta_0)}x^2 + y_0.$$
Znaleźć odpowiedni kąt rzutu $\theta_0$ jeżeli prędkość początkowa $v_0 = 20$ m/s, a dystans do drugiego zawodnika wynosi 40 m ($y_0$ jest współrzędną początkowej wysokości piłki). Przyśpieszenie ziemskie przyjąć jako $g = 9{,}81$ m/s$^2$. Piłka opuszcza rękę pierwszego gracza na wysokości 1,8 m, a drugi gracz ją łapie na wysokości 1 m. Następnie znaleźć maksymalną wysokość lotu piłki.

12. Dwie ciecze o różnej temperaturze trafiają do mieszacza i wypływają w tej samej wspólnej temperaturze. Pojemność cieplna cieczy A i B wynosi odpowiednio
$$C_p = 3{,}381 + 1{,}804 \cdot 10^{-2}T - 4{,}300 \cdot 10^{-6}T^2[cal/(mol \cdot K)]$$
i
$$C_p = 8{,}592 + 1{,}290 \cdot 10^{-1}T - 4{,}078 \cdot 10^{-5}T^2[cal/(mol \cdot K)]$$
gdzie $T$ jest temperaturą bezwzględną. Ciecz A wpływa do mieszacza w temp. 400$^o$C, a B w temp. 600$^o$C. Wiedząc, że jest dwa razy więcej cieczy A w mieszaczu oraz pamiętając, że oddane/pobrane ciepło można wyrazić jako
$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p \, \mathrm{d}T$$
znaleźć temperaturę cieczy opuszczających mieszacz.