Uniwersytet Zielonogórski

Laboratorium Metod Numerycznych

Układy równań liniowych

Zakres materiału

- Warunki konieczne i wystarczające istnienia rozwiązań. Uwarunkowanie układu równań liniowych.
- Algorytmy dokładnego rozwiązywania układów równań liniowych:
  - metoda Cramera (wyznaczników),
  - metody eliminacji Gaussa: prosta oraz z częściowym i pełnym wyborem.
- Algorytmy iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych:
  - metoda iteracji prostej Jacobiego,
  - metoda Gaussa-Seidela.
- Warunki zbieżności metod iteracyjnych.
- Zapoznać się z funkcjami Matlaba określającymi rząd (`rank`), normę (`norm`) oraz współczynnik uwarunkowania (`cond`) macierzy oraz funkcjami realizującymi metody rozwiązywania układów równań liniowych: eliminacji Gaussa (`GaussFull.m`), Jacobiego (`Jacobi.m`) oraz Gaussa-Seidela (`GaussSeidel.m`).

Zadania

1. Na podstawie twierdzenia Kroneckera-Capellego określić liczbę rozwiązań poniższych układów równań:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 2x + y + z = 3 \\ y - x + 2z = 5 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} x - y + 1{,}5z = 6 \\ x + 2y + 0{,}5z = 2 \\ 2x + y + 2z = 10 \end{cases}, \quad \text{c)} \begin{cases} x + 3{,}1223z = 2{,}2132 \\ 4{,}1220x + 12{,}123y + z = 3{,}021 \\ x - y + 2z = 5{,}8921 \end{cases}$$

   Sprawdzić wyniki poprzez narysowanie odpowiednich wykresów i określić zbiory rozwiązań.

2. Napisać prosty skrypt MATLAB-a rozwiązujący zadany układ równań liniowych korzystający z reguły Cramera (wyznaczników). Skrypt powinien uwzględniać odpowiednią kontrolę istnienia rozwiązań. Następnie użyć go do rozwiązania układów z zadania 1.

3. Dla poniższych układów równań:
   - wyznaczyć wskaźniki uwarunkowania korzystając z różnych norm macierzowych (funkcje `norm` lub `cond`),
   - rozwiązać numerycznie (eliminacja Gaussa) i porównać z rozwiązaniem dokładnym (zwrócić uwagę na przyczyny ewentualnych rozbieżności):

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 1,1x + 2y = 10{,}4 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} 2x + 5{,}999999999999999y = 8{,}000000000000001 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases}, \quad \text{c)} \begin{cases} 5x + 3{,}1y + 4z = -2 \\ 3x + 0{,}1y + z = -4 \\ 6x + 9y + 9z = 6 \end{cases}$$

4. Napisać prosty skrypt do wyznaczania złożoności obliczeniowej eliminacji Gaussa, czyli zależności czasu wykonania procedury od rozmiaru macierzy układu. Zilustrować ją wykresem. Jak można zinterpretować otrzymane wyniki?

5. Rozwiązać metodami iteracyjnymi układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ gdzie:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b^T} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \quad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b^T} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 5{,}5 \end{bmatrix}$$

   - zbadać zależność szybkości zbieżności i poprawności rozwiązania od przybliżenia początkowego (przyjąć dokładności rozwiązania $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-10}$),
   - sporządzić wykres relacji między błędem a liczbą iteracji oraz dokonać porównania skuteczności metod,

- generując losowo macierz **A** o różnych rozmiarach ocenić klasę stosowalności rozważanych schematów iteracyjnych.

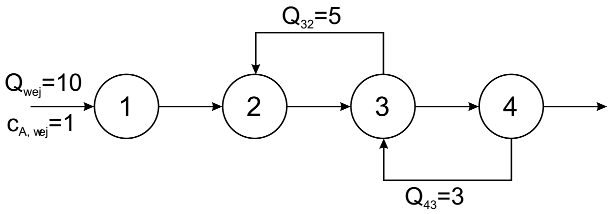
6. Rozważyć następujące wektory: $\boldsymbol{x} = (2, -3, a), \boldsymbol{y} = (b, 1, -4), \boldsymbol{z} = (3, c, 2)$. Wiadomo, że $\boldsymbol{x}$ jest prostopadły zarówno do $\boldsymbol{y}$ jak i do $\boldsymbol{z}$. Ponadto iloczyn skalarny $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$ wynosi 2. Używając dowolnej metody znaleźć niewiadome a, b i c.

7. Rozważyć następujące wektory: $\boldsymbol{x} = (a, b, c), \boldsymbol{y} = (-2, 1, -4), \boldsymbol{z} = (1, 3, 2)$. Jeżeli

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}) = (5a + b, 3b - 2, -4c + 1)$$

to jakie są wartości niewiadomych a, b i c?

8. ($\star$) W czterech połączonych jednorodnie wymieszanych reaktorach przedstawionych schematycznie na rysunku poniżej zachodzi nieodwracalna reakcja pierwszego rzędu: $A \xrightarrow{k} B$



Rys. 1. Sieć przepływowa reaktorów do zadania 8.

W ten sposób współczynnik szybkości transformacji substancji A w B jest opisany zależnością:

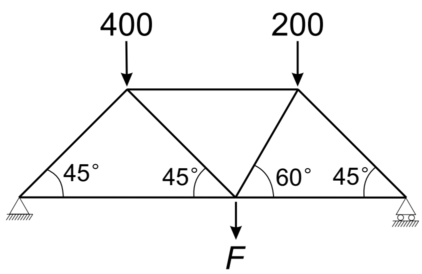
$$R_{ab} = kVc$$

gdzie V–jest objętością reaktora, a c–koncentracją składnika chemicznego A. Reaktory mają różne objętości i pracują w różnych temperaturach, w związku z czym mają różne współczynniki reakcji:

Reaktor	V[dm^3]	k[h^{-1}]
1	25	0.05
2	75	0.1
3	100	0.5
4	25	0.1

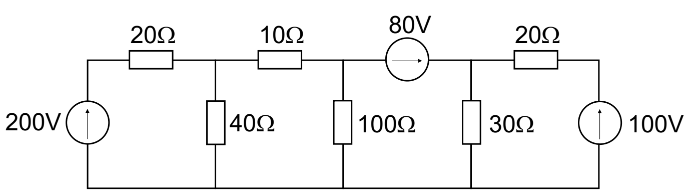
Wyznaczyć koncentrację składników A i B w każdym z reaktorów w stanie ustalonym.(Wskazówka: w stanie ustalonym przepływ wejściowy jest równy wyjściowemu)

9. ($\star$) Wyznaczyć wartość siły F w warunkach statycznych dla kratownicy pokazanej na rysunku poniżej.



Rys. 2. Kratownica do zadania 9.

10. ($\star$) Korzystając z pierwszego i drugiego prawa Kirchoffa znaleźć rozkład prądów dla układu z rysunku.



Rys. 3. Układ elektryczny z zadania 10.