Uniwersytet Zielonogórski

Laboratorium Metod Numerycznych

Całkowanie numeryczne

Zakres materiału

- Definicja całki oznaczonej w sensie Newtona-Leibnitza oraz w sensie Riemanna.
- Pojęcie kwadratury oraz jej reszty, rzędu i stopnia.
- Kwadratury Newtona-Cotesa. Stosowalność i błąd całkowania.
- Optymalny dobór węzłów.
- Całki niewłaściwe i osobliwe. Kwadratury gaussowskie.
- Całki wielokrotne.

Zadania

1. Stosując kwadratury Newtona-Cotesa stopnia 1 - 6 wyznaczyć wartości całek oznaczonych z następujących funkcji:

$$\text{a) } f_1(x) = 3x^3 - 1, \quad \text{b) } f_2(x) = \sin(x), \quad \text{c) } f_3(x) = e^{-x}.$$

   dla wybranych dowolnie granic całkowania. Ocenić na podstawie reszty kwadratury oraz wartości wyznaczanej analitycznie zależność dokładności obliczeń od stopnia kwadratury.

2. Za pomocą złożonych kwadratur Newtona-Cotesa stopnia 1 - 3 dokonać całkowania następujących funkcji:

$$\text{a) } g_1(x) = \prod_{i=1}^{5}(x-i), \quad \text{b) } g_2(x) = x\sin(x), \quad \text{c) } g_3(x) = e^{-x}.$$

   dla dowolnie dobranych przedziałów całkowania. Zbadać zależność błędu wyniku od stopnia złożoności kwadratury (złożoność m dobierać w zakresie 1 - 10).

3. Używając kwadratur Newtona-Cotesa (stopień w zakresie 1 - 3, złożenie w zakresie 1 - 5) obliczyć całki:

   a) $\int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{x}\right) dx$

   b) $\int_{0}^{6} \operatorname{tg}(x) dx$

4. Stosując kwadratury Gaussa-Legendre'a stopnia 1 - 6 wyznaczyć wartości całek z punktu 1. Porównać dokładność uzyskanych rezultatów za pomocą kwadratur Newtona-Cotesa oraz Gaussa-Legendre'a.

5. Obliczyć przy wykorzystaniu kwadratur Gaussa-Czebyszewa różnego stopnia:

   a) $\int_{0}^{5} \left(\frac{1}{x}\right) dx$

   b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) dx$

   c) $\int_{1}^{3} \frac{1}{1-x^2} dx$

   Ocenić dokładność dokonywanego całkowania numerycznego. Dla jakich funkcji podcałkowych odpowiedni jest ten typ kwadratury?

6. Wyznaczyć wartości następujących całek niewłaściwych z zastosowaniem kwadratur Gaussa-Laguerre'a (a) oraz Gaussa-Hermite'a (b):

   a)

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx, \qquad \int_{1}^{\infty} xe^{-x^2} dx, \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-2x}\frac{\sin(x)}{x} dx$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)e^{\cos(x)} dx$$

dla różnych stopni kwadratury. Jak można ocenić stosowalność użytych tutaj kwadratur do liczenia całek właściwych?

7. Prawo Faraday'a opisuje spadek napięcia V_L na elemencie indukcyjnym jako

$$V_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

gdzie: L- induktancja [H], i - natężenie prądu [A], t - czas [s]. Wyznaczyć spadek napięcia jako funkcji czasu dla $L = 4H$ na podstawie następujących danych pomiarowych:

t	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7
i	0	0,15	0,3	0,55	0,8	1,9

8. Policzyć wartość średnią i skuteczną prądu zmiennego określonego wzorem:

$$\begin{cases} i(t)4e^{-1{,}5t\sin(2\pi t)} & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant T/2 \\ 0 & \text{dla } T/2 \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

gdzie $T = 1$ s. Użyć kwadratur gaussowskich.

9. Prędkość wznoszenia się rakiety v może być wyliczona z następującego wzoru:

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

gdzie: u - prędkość wylotowa gazów z dyszy, m_0- masa startowa, q - współczynnik zużycia paliwa i g - przyśpieszenie ziemskie. Wyznaczyć jak wysoko poleci rakieta w ciągu 30 sekund lotu jeżeli $m_0 = 150000$ kg, $u = 2000$ m/s. i $q = 2600$ kg/s (przyjąć, że przyśpieszenie ziemskie jest stałe i równe 9,81 m/s^2). Zastosować 6 punktową regułę trapezową oraz Simpsona, a następnie kwadraturę Gaussa. Porównać wyniki z wartością dokładną.

10. ($\star$) Metalowa belka ma przekrój eliptyczny o sumie półosi równej 4. Z przyczyn konstrukcyjnych pole powierzchni przekroju musi mieć maksymalną wartość. Wyznaczyć parametry przekroju.

11. ($\star$) Samochód na zakręcie porusza sie ze stałą prędkością v po łuku opisanym równaniami $x = \cos(t)$ i $y = r\sin(t)$, gdzie $t \in [0, \pi]$ i $r \in [0.25, 4]$. Znaleźć wartość r dla których średnia siła odśrodkowa w czasie ruchu będzie maksymalna.

12. ($\star$) Pewna zmienna losowa X opisana jest rozkładem wykładniczym o gęstości prawdopodobieństwa $f(x) = 2e^{-2x}, x \geqslant 0$. Znaleźć granice a i b odcinka o minimalnej długości, takiego że $P(a < X < b) = \frac{1}{4}$.