Uniwersytet Zielonogórski

Laboratorium Metod Numerycznych

# Aproksymacja

## Zakres materiału

- Matematyczne sformułowanie problemu aproksymacji. Przypadek dyskretny i ciągły.
- Kryteria aproksymacji. Regresja średniokwadratowa.
- Rodziny wielomianów ortogonalnych. Wielomiany Czebyszewa i Hermita.
- Zapoznać się z następującymi funkcjami Matlab-a:
  - `polyfit` – wielomianowa aproksymacja średniokwadratowa,
  - `lsqcurvefit` i `lsqnonlin` – nieliniowa aproksymacja średniokwadratowa,
  - `fminunc` i `fminsearch` – nieliniowa optymalizacja funkcji wielu zmiennych bez ograniczeń,

## Zadania

1. Dystans potrzebny do zatrzymania samochodu jest funkcją jego prędkości. Następujące dane eksperymentalne zostały zebrane celem zbadania tej zależności

| $v$ [km/h] | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ [m] | 2 | 2.5 | 4.25 | 5 | 7.5 | 11.25 | 15 |

   Ocenić odległość hamowania dla samochodu jadącego z prędkością 45 km/h. Zastosować modele liniowy i kwadratowy. Naszkicować odpowiednie wykresy.

2. Dokonać zadania regresji liniowej dla następujących danych:

| $x_i$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2.9 | 2.8 | 2.7 | 2.3 | 2.1 | 2.1 | 1.7 |

   a) stosując kryterium sumy kwadratów błędów,
   b) stosując kryterium sumy wartości bezwzględnych.
   Porównać wyniki na wykresie.

3. Dopasować model eksponencjalny postaci $y(x) = a_0 \exp(a_1 x)$ do danych w tabeli.

| $x_i$ | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 2.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 750 | 1000 | 1400 | 2000 | 2700 | 3750 |

   Następnie rozwiązać zadanie przez sprowadzenie do problemu regresji liniowej. Porównać rezultaty.

4. Wyznaczyć współczynniki wielomianu aproksymującego 2, 3 i 5 stopnia dla następujących węzłów aproksymacji:

| $x_i$ | -4.001671 | -1.125367 | 1.342565 | 2.848678 | 4.147236 | 5.971023 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1.231469 | -3.237849 | 7.910278 | -2.923678 | 6.347865 | 8.346236 |

   Napisać prosty skrypt i porównać błędy aproksymacji.

5. Przyśpieszenie ziemskie $g$ w zależności od wysokości nad powierzchnią Ziemi $h$ jest opisane danymi:

| $h$ [m] | 0 | 20000 | 40000 | 60000 | 80000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g$ [m/s$^2$] | 9.8100 | 9.7487 | 9.6879 | 9.6278 | 9.5682 |

   Znaleźć $g$ na wysokości 55000 m stosując:

   (a) model kwadratowy: $g(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2$,

(b) model eksponencjalny: $g(h) = a_0 + a_1 \exp(a_2 h)$,

(c) model potęgowy: $g(h) = a_0 + a_1 h^{a_2}$

6. Reakcje enzymatyczne są szeroko używane do opisu procesów biologicznych w inżynierii środowiska. Proponowane modele zależności inicjalizacyjnego współczynnika szybkości reakcji $v_0$ od koncentracji substratu $S$ są przedstawione poniżej:

$$\text{a) } v_0 = kS, \quad \text{b) } v_0 = \frac{kS}{K+S}, \quad \text{c) } v_0 = \frac{kS^2}{K+S^2}, \quad \text{d) } v_0 = \frac{kS^3}{K+S^3}.$$

| $S$ [mg/cm$^3$] | $v_0$ [mg/cm$^3$/s] |
|---|---|
| 0.01 | 6.07773e-11 |
| 0.05 | 7.5948e-9 |
| 0.1 | 6.06259e-08 |
| 0.5 | 5.78833e-6 |
| 1 | 1.7365e-5 |
| 5 | 2.42334e-5 |
| 10 | 2.43012e-5 |
| 50 | 2.43109e-5 |
| 100 | 2.4311e-5 |

Który z modeli jest najbardziej adekwatny?

7. Zależność stopnia aktywności promieniowania radiowego pewnego układu podwójnego gwiazd względem czasu przyjmuje formę okresową. W tabeli zestawiono wybrane obserwacje tej wielkości.

| $x_i$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |

Rozwiązać zadanie aproksymacji średniokwadratowej przy zastosowaniu modelu zjawiska w postaci następującej funkcji trygonometrycznej:

$$g(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$$

dla kolejnych $n = 1, 2, \ldots$ Jaka minimalna wartość $n$ pozwoli na osiągnięcie błędu aproksymacji na poziomie zerowym? Wyniki zilustrować odpowiednimi wykresami.

8. W poniższej tabeli zestawiono wyniki badań dotyczących działania herbicydów na rośliny:

| $t$ | 0 | 7 | 15 | 21 | 35 | 49 | 64 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 99.48 | 83.93 | 66.02 | 56.83 | 45.60 | 32.46 | 21.76 | 19.11 |

gdzie: $t$ - czas, $y$ - ilość herbicydu obecnego w czasie $t$. Zakładając, że funkcja aproksymująca dana jest jako $y(t) = be^{-kt}$ znaleźć estymaty parametrów $b$ i $k$ tej funkcji przy założeniu następujących kryteriów błędu:

$$\text{a) } J = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y)^2, \qquad \text{b) } J = \sum_{i=1}^{n} |y_i - y|.$$

9. ($\star$) Napisać prosty skrypt realizujący zadanie regresji liniowej dla funkcji 2 zmiennych.

10. ($\star$) Dokonać aproksymacji średniokwadratowej funkcji $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ w przedziale $x \in (-1, 1)$ z zastosowaniem wielomianów Czebyszewa. Napisać prosty skrypt i narysować wykresy porównujące jakość aproksymacji dla wielomianów stopnia 1, 2 i 3.

11. ($\star$) Na kwadracie $\Omega = [0, \pi/2]^2$ rozpięto równomierną siatkę dwuwymiarową $\Gamma$ o rozmiarach $5 \times 5$ punktów. W obszarze $\Omega$ funkcję trygonometryczną $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$ należy zastąpić paraboloidą obrotową ($g(x, y) = a_1(x - a_3)^2 + a_2(y - a_4)^2 + a_5$) w taki sposób, aby błąd średniokwadratowy na siatce $\Gamma$ był jak najmniejszy. Napisać prosty skrypt realizujący to zadanie i zobrazować wyniki wykresem.