Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Laboratorium Systemów Przetwarzania Numerycznego i Symbolicznego

Struktury danych: wektory i macierze

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Symbolem `.*` oznacza się tzw. mnożenie „element-przez-element” dwóch tablic. Wywnioskować na czym polega ta operacja wprowadzając polecenia

   ```
   >> x = [1 2 3]; y = [4 5 6];
   >> z = x .* y
   ```

   Przez analogię określić jaki będzie rezultat poleceń

   ```
   >> z = x .\ y
   ```

   oraz

   ```
   >> z = x .^ y
   ```

   Ponadto zinterpretować wyniki poleceń

   ```
   >> z = x .^ 2
   ```

   oraz

   ```
   >> z = 2 .^ [x y]
   ```

2. Wykonać obliczenia ręcznie i porównać z rezultatami pracy programu.

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

   (a) `A .* B'` (b) `A .\ B` (c) `A .^ B`

3. Liczbę $\lambda \in \mathcal{C}$ nazywamy wartością własną macierzy $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$, jeśli istnieje taki niezerowy wektor $x \in \mathcal{C}^n$, że zachodzi równość

   $$Ax = \lambda x$$

   Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym macierzy A przynależnym do* λ. W MATLABie wartości (i opcjonalnie wektory) własne uzyskuje się poprzez wywołanie funkcji `eig`.

   Wyznaczyć wartości i wektory własne następujących macierzy:

   $$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Sprawdzić, że dla $(n \times n)$-macierzy A zachodzi

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy A.

5. Najczęściej używanymi normami wektora $x \in \mathcal{R}^n$ są

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

Indukowane przez nie normy macierzy $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$ są postaci

$$\|A\|_1 := \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}, \quad \|A\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

gdzie $\lambda_{max}(A^T A)$ oznacza największą wartość własną macierzy $A^T A$. Ponadto czasami używa się również tzw. *normy Frobeniusa*:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Wyznaczyć wartości tych norm dla poniższych wektorów i macierzy:

$$[-1, 1, -2]^T, \quad [3, -4, 0, \frac{3}{2}]^T, \quad [2, 1, -3, 4]^T,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proszę wykonać ćwiczenie posługując się wyłącznie funkcjami `max`, `sum`, `abs`, oraz `sqrt`. Następnie zapoznać się z opisem funkcji `norm`. Korzystając z niej sprawdzić, że dla powyższych wektorów i tablic spełnione są tożsamości:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2, \quad \|x\|_2^2 \le \|x\|_1\|x\|_\infty \le 0.5(\sqrt{n}+1)\|x\|_2^2,$$

oraz

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|, \quad \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \le \|A\|\|B\|, \quad 1/\|A^{-1}\| \le |\lambda| \le \|A\|$$

gdzie λ jest dowolną wartością własną macierzy A.

6. Co jest efektem wykonania poniższych instrukcji?

(a) `x = 1:5` (b) `y = 0: pi/4: pi` (c) `z = 6:-1:1`

Zapisać te same instrukcje przypisania przy użyciu funkcji `linspace`. Utworzyć tablicę, której pierwsza kolumna składa się z punktów $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{15} = 3$ takich, że $x_i - x_{i-1} = 0.2$, $i = 1, \ldots, 15$, druga kolumna natomiast — z odpowiednich wartości $y_i = \exp(-x_i)\sin(x_i)$.

7. Wytłumaczyć rezultat poniższego ciągu instrukcji:

```
>> A = [1 2; 3 4; 5 6]
>> A(:) = 11:16
```

8. Dana jest następująca macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

Wprowadzieć ją używając minimalną liczbę operacji. Przewidzieć rezultat wykonania poniższych operacji, a następnie sprawdzić swoje przypuszczenia przy użyciu komputera.

(a)	`A(:,1)`	(b)	`A(2,:)`	(c)	`A(:,2:3)`
(d)	`A(2:3,2:3)`	(e)	`A(:,1:2:3)`	(f)	`A(2:3)`
(g)	`A(:)`	(h)	`A(:,:)`	(i)	`ones(2,2)`
(j)	`eye(2)`	(k)	`B = [A, [ones(2,2); eye(2)] ]`	(l)	`diag(A)`
(m)	`diag(A,1)`	(n)	`diag(A,-1)`	(o)	`diag(A,2)`

9. Przy pomocy funkcji `rand` wygenerować macierz A o pięciu wierszach i dziesięciu kolumnach, której elementy będą losowymi liczbami całkowitymi z przedziału $[-10, 10]$.

   (a) Przy pomocy jednej instrukcji odwrócić w A kolejność kolumn (tzn. kolumna pierwsza ma się stać ostatnią, druga — przedostatnią, itd.).

   (b) Przy pomocy jednej instrukcji zamienić miejscami wiersz pierwszy z trzecim.

   (c) Przy pomocy jednej instrukcji zamienić ze sobą kolumny: drugą z czwartą, szóstą z ósmą oraz dziesiątą z pierwszą (jednocześnie!).

   (d) Używając pojęcia macierzy pustej `[ ]` usunąć kolumny: piątą, szóstą i dziewiątą.

10. Celem zadania jest pokazanie możliwości operowania funkcjami (np. funkcją *sinus*) w odniesieniu do całych macierzy.

   (a) Wprowadzić następującą macierz A:

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & \pi/3 \\ \pi/6 & \pi/2 \end{bmatrix}$$

   (b) Wyznaczyć sinusy poszczególnych elementów i umieścić je w tablicy $B1$.

   (c) Wyznaczyć cosinusy poszczególnych elementów i umieścić je w tablicy $B2$.

   (d) Obliczyć $B1^2 + B2^2$. Zauważyć, że rezultatem nie jest macierz jednostkowa.

   (e) Określić wartości i wektory własne macierzy A; macierzy wektorów własnych nadać nazwę M, a macierzy wartości własnych — nazwę L.

   (f) Obliczyć $M \sin(L) M^{-1}$.

11. Celem zadania jest pokazanie możliwości użycia operacji dzielenia macierzowego (\).

   (a) Przy użyciu instrukcji `rand` wygenerować pięć (2×2)-macierzy A, B, C, D i E.

   (b) Nie używając instrukcji `inv` obliczyć F jedną komendą.

   $$F = A^{-1}[B + C^{-1}(D^{-1}E)]$$

   (c) Bez użycia instrukcji `inv` określić pierwszą kolumnę macierzy A^{-1} za pomocą jednej komendy.

   Sprawdzić swoje odpowiedzi przy użyciu instrukcji `inv`.