

Metody probabilistyczne – ćwiczenia

Przestrzeń probabilistyczna

Program ćwiczeń obejmuje następujące zadania:

1. Na przyjęcie ma przyjść n osób. Zakładamy, że każda z nich ma jednakowe prawdopodobieństwo urodzin w dowolnym dniu roku, niezależnie od pozostałych osób (założyć, że rok nie jest przestępny). Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z osób ma inny dzień urodzin?
2. Wyciągamy 7 kart z wierzchu dobrze potasowanej talii. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że:
 - (a) 7 kart zawiera dokładnie 3 asy,
 - (b) 7 kart zawiera dokładnie 2 króle,
 - (c) 7 kart zawiera dokładnie 3 asy lub dokładnie 2 króle.
3. Dobrze potasowaną talię kart rozkłada się czterem graczom. Określić prawdopodobieństwo tego, że każdy z graczy otrzyma asa.
4. 20 samochodów parkuje codziennie na tym samym parkingu. 10 z nich wyprodukowano w Polsce, pozostałe za granicą. Parking ma dokładnie 20 miejsc, jedno koło drugiego w rzędzie.
 - (a) Na ile sposobów mogą zaparkować samochody?
 - (b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że danego dnia samochody polskie i zagraniczne będą się przeplatać?
5. Wśród wszystkich studentów na III roku informatyki 60% jest geniuszami, 70% lubi czekoladę, a 40% zalicza się do obu kategorii. Określić prawdopodobieństwo tego, że przypadkowo wybrany student nie jest ani geniuszem, ani nie lubi czekolady.
6. Kostka jest obciążona w ten sposób, że każda parzysta liczba oczek jest dwukrotnie bardziej prawdopodobna niż liczba nieparzysta. Wszystkie parzyste liczby oczek są jednakowo prawdopodobne, podobnie jak wszystkie liczby nieparzyste. Skonstruować odpowiedni model probabilistyczny i określić prawdopodobieństwo tego, że wypadnie liczba oczek mniejsza niż cztery.

7. Kostka ma cztery ścianki. Rzucamy nią aż do momentu, gdy otrzymamy parzystą liczbę oczek. Co jest w tym przypadku przestrzenią zdarzeń elementarnych?
8. Udowodnić nierówność Bonferroniego

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

9. Osiem wież umieszczamy losowo na różnych polach szachownicy. Określić prawdopodobieństwo tego, że wieże są bezpieczne, tzn. w każdym wierszu i w każdej kolumnie nie ma więcej niż jednej wieży.
10. (*Paradoks De Méré'a*) Rzucamy trzy razy kostką. Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie sumy oczek równej 11 czy równej 12? (Pytanie to postawił Pan wielkiego rodu De Méré swojemu przyjacielowi Pascalowi w XVII wieku.)
11. Klub składa się z prezesa i pewnej liczby (możliwe, że zerowej) członków.
- (a) Dowolny podzbiór n osób może zdecydować o utworzeniu klubu. Wyjaśnić, dlaczego liczba możliwych klubów to $n2^{n-1}$
- (b) Znaleźć alternatywny sposób określenia liczby możliwych klubów i dowieść, że

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$