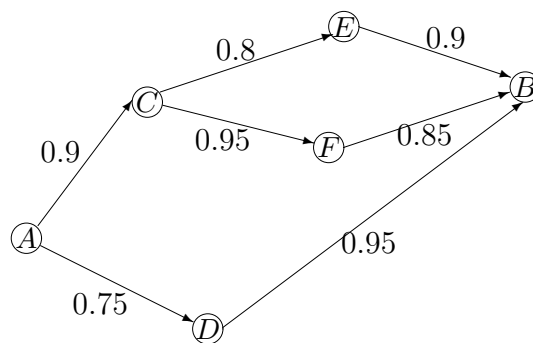


Metody probabilistyczne – ćwiczenia

Niezależność

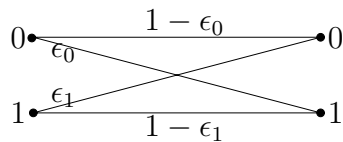
Program ćwiczeń obejmuje następujące zadania:

1. Rozważmy doświadczenie polegające na dwukrotnym rzucie symetryczną kostką czterościenną. Czy poniższe zdarzenia są niezależne?
 - (a) zdarzenie A_i polegające na tym, że na pierwszej kostce wypadło i oczek, oraz B_j – że na drugiej wypadło j oczek;
 - (b) zdarzenie A polegające na tym, że na pierwszej kostce wypadło jedno oczko, oraz zdarzenie B , polegające na tym, że suma oczek to 5;
 - (c) zdarzenie A , polegające na tym, że maksimum rezultatów to dwa oczka, oraz B – zdarzenie polegające na tym, że minimum rezultatów to dwa oczka?
2. Mamy dwie nierzetelne monety: niebieską (prawdopodobieństwo otrzymania orła to 0.99) i czerwoną (prawdopodobieństwo otrzymania orła to 0.01). Wybieramy jedną z nich losowo i rzucamy dwa razy. Niech N – wybór monety niebieskiej, O_1, O_2 – orły w odpowiednich rzutach. Zbadać niezależność O_1 i O_2 .
3. Rzucamy dwa razy rzetelną monetą. Rozważmy zdarzenia jak w zad. 2. Zbadać ich niezależność.
4. Sieć komputerowa łączy węzły A i B poprzez węzły pośrednie C, D, E, F . Prawdopodobieństwa, że dane węzły są połączone, przedstawia rysunek. Zakładamy, że



uszkodzenia połączeń występują niezależnie od siebie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że istnieje jakieś połączenie węzłów A i B ?

5. Test na obecność pewnej choroby ma dokładność 90%, tzn. jeżeli osoba choruje na tę chorobę, rezultat testu jest pozytywny z prawdopodobieństwem 0.9, a jeżeli osoba jest zdrowa, rezultaty testu są negatywne z prawdopodobieństwem 0.9. Losowo wybrana osoba ma chorobę z prawdopodobieństwem 0.001. Dla danej osoby test dał wynik pozytywny. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest ona chora?
6. Myśliwy ma dwa psy. Pewnego dnia, ścigając zwierzę dotarł do miejsca, gdzie ścieżka się rozgałęzia. Wiedząc, że każdy pies, niezależnie od drugiego, wybierze prawidłową drogę z prawdopodobieństwem p , decyduje się wypuścić psy, żeby wybrały ścieżki. Jeżeli się zgodzą, wybierze tę samą ścieżkę, a jeżeli nie – sam wybierze ścieżkę losowo. Czy ta strategia jest lepsza niż wypuszczenie tylko jednego psa, żeby wybrał drogę?
7. Sygnał binarny transmitowany przez zaszumiony kanał komunikacyjny może zostać otrzymany wg następującego schematu:



- (a) Załóżmy, że nadajnik transmituje 0 z prawdopodobieństwem p , a 1 z prawdopodobieństwem $1 - p$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany symbol zostanie odebrany poprawnie?
- (b) Załóżmy, że nadano ciąg 1011. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie symbole zostaną odebrane poprawnie?
- (c) Aby poprawić niezawodność, każdy symbol jest nadawany trzy razy, a otrzymany symbol jest dekodowany przez regułę większościową. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wysłane 0 zostanie poprawnie zdekodowane?
- (d) Załóżmy, że nadajnik transmituje 0 z prawdopodobieństwem p , a 1 z prawdopodobieństwem $1 - p$, oraz że stosuje się schemat z poprzedniego podpunktu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wysłano 0, jeżeli otrzymano 101?
8. Pijany linoskoczek stara się utrzymać równowagę robiąc krok do przodu z prawdopodobieństwem p oraz krok do tyłu z prawdopodobieństwem $1 - p$, niezależnie od poprzednich kroków.
 - (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że po dwóch krokach będzie w tym samym miejscu?
 - (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że po trzech krokach posunie się o jeden krok naprzód?
 - (c) Wiedząc, że po trzech krokach przesunął się o jeden krok do przodu, jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy krok był do przodu?

9. Miasto zasilane jest energią elektryczną z n elektrowni, ale w zasadzie każda z nich z osobna jest w stanie dostarczyć całą potrzebną energię. Załóżmy, że w każdej z nich może nastąpić awaria (z prawdopodobieństwem p_i dla elektrowni i), niezależnie od pozostałych.
- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że nad miastem zapadną ciemności?
 - (b) Jeżeli do oświetlenia miasta wymagana jest energia z przynajmniej dwóch elektrowni, to jakie jest prawdopodobieństwo zapadnięcia ciemności?