

Metody probabilistyczne – ćwiczenia

Zmienne losowe dyskretne

Program ćwiczeń obejmuje następujące zadania:

1. Drużyna piłkarska ma rozegrać dwa mecze. Prawdopodobieństwa ich nie przegrania wynoszą odpowiednio 0.4 i 0.6. Jeżeli drużyna nie przegrywa danego meczu, ma 50% szans na wygraną i 50 % szans na remis, niezależnie od innych wydarzeń. Drużyna otrzymuje 2 punkty za wygraną, 1 za remis i 0 za przegraną. Niech X będzie sumą zdobytych punktów. Znaleźć rozkład X .
2. Załóżmy, że idziesz na przyjęcie, na którym jest 500 gości (włącznie z Tobą). Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jeden inny gość ma urodziny tego samego dnia roku, co Ty? Oblicz tę wartość dokładnie i w sposób przybliżony – z zastosowaniem rozkładu Poissona (założyć, że rok nie jest przestępny).
3. Nałogowy palacz nosi jedno pudełko zapalek w prawej kieszeni i jedno w lewej. Za każdym razem gdy chce zapalić, wybiera losowo pudełko (z prawdopodobieństwem $1/2$) niezależnie od innych wyborów. Początkowo obydwie pudełka mają po N zapalek. Jaki jest rozkład prawdopodobieństwa liczby pozostałych zapalek w momencie, gdy palacz sięga po pudełko i stwierdza, że jest puste?
4. Niech X – zmienna losowa o rozkładzie Bernoulliego z parametrami n i p . Pokazać, że skoki można wyznaczać z poniższych wzorów rekurencyjnych:

$$p_X(0) = (1 - p)^n, \quad p_X(k + 1) = \frac{p}{1 - p} \frac{n - k}{k + 1} p_X(k), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

5. Niech X – zmienna losowa o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Pokazać, że skoki $p_X(k)$ wzrastają monotonicznie wraz z k aż do punktu, w którym k osiąga największą wartość całkowitą nie przekraczającą λ , a potem monotonicznie maleją.
6. Rozważmy rozkład Bernoulliego z parametrami n i p . Pokazać, że dla $n \rightarrow \infty$ i $p \rightarrow 0$ oraz $\lambda = np$ zbiega on do rozkładu Poissona z parametrem λ .

Wskazówka:

$$p_X(k) = \frac{n!}{(n - k)!k!} p^k (1 - p)^{n - k} = \frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n - k}.$$

7. Niech X – zmienna losowa przybierająca wartości całkowite od 0 do 9 włącznie, z jednakowymi prawdopodobieństwami $1/10$.
- (a) Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $Y = X \bmod 3$.
 - (b) Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $Z = 5 \bmod (X + 1)$.

8. Rozważmy zmienną losową X o rozkładzie

$$\begin{cases} x^2/a, & x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

- (a) Określić a i $E[X]$.
 - (b) Jaki jest rozkład zmiennej $Z = (X - E[X])^2$? Obliczyć $\text{var}(X)$.
9. W kampanii reklamowej fabryka czekolady umieszcza w batonach złote bilety oznaczające wygraną wycieczkę. Prawdopodobieństwo znalezienia takiego biletu wynosi p . Określić wartość oczekiwaną i wariancję liczby batonów, które należy kupić aby zdobyć wygraną.
10. Rozważmy następującą grę: rzucasz monetą do pierwszego pojawienia się orła. Jeżeli orzeł pojawi się w n -tym rzucie, otrzymujesz 2^n zł. Jaka jest oczekiwana wygrana? Ile zapłaciłbyś, aby zagrać w tę grę?
11. Rozważmy zmienną losową X o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Obliczyć jej drugi moment (czyli $E[X^2]$) i wariancję.