Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Metody probabilistyczne – ćwiczenia

Rozkłady łączne

Program ćwiczeń obejmuje następujące zadania:

1. Udowodnić zależność

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_{x,y} g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$$

a na jej podstawie

$$\mathrm{E}[aX + bY] = a\,\mathrm{E}[X] + b\,\mathrm{E}[Y].$$

2. W drodze do pracy, Alicja przechodzi przez cztery przejścia dla pieszych, na których z jednakowymi prawdopodobieństwami może być światło zielone lub czerwone, niezależnie od pozostałych.

   (a) Jaki jest rozkład, wartość oczekiwana i wariancja liczby napotkanych czerwonych świateł?

   (b) Przypuśćmy, że czerwone światło opóźnia Alicję o dwie minuty. Jaka jest wariancja czasu dojścia do pracy?

3. Twój komputer zachowuje się ostatnio dziwnie i podejrzewasz, że masz wirusa. Niestety, wszystkie z 12 programów antywirusowych, które posiadasz, są nieco przestarzałe. Wiesz, że jeżeli komputer jest faktycznie zawirusowany, każdy z programów (niezależnie od pozostałych) ma 80% szans wykrycia wirusa i 20% szans na uznanie, że wszystko jest w porządku. Jeżeli jednak nie ma wirusa, każdy program ma 90% szans na uznanie, zę komputer jest wolny od wirusów i 10% szans na fałszywy alarm o wirusie. Wiedząc, że Twój komputer ma 65% szansę zarażenia wirusem, a także, że uwierzysz programom antywirusowym o ile 9 lub więcej będzie zgodnych, znajdź prawdopodobieństwo tego, że programy doprowadzą do prawidłowej odpowiedzi.

4. Co rano, głodny Zenek je kilka jajek. Ich liczba to 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 (prawdopodobieństwa są tu jednakowe), niezależnie od tego, co wydarzyło się wcześniej. Niech X oznacza liczbę jajek, które Zenek zjada w ciągu 10 dni. Znaleźć $\mathrm{E}[X]$ i $\mathrm{var}(X)$.

5. Pokazać, że jeżeli dyskretne zmienne losowe X i Y są niezależne, to niezależne są również zmienne $g(X)$ i $h(Y)$, gdzie: g i h – ustalone funkcje.

6. Pokazać, że dla niezależnych zmiennych losowych dyskretnych X i Y oraz ustalonych funkcji g i h zachodzi
$$\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\,\mathrm{E}[h(Y)].$$
Wywnioskować stąd zależność
$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y).$$

7. Metoda Monte Carlo obliczania powierzchni danego podzbioru S kwadratu o boku jednostkowym jest następująca: Losowo generuje się ciąg niezależnych punktów kwadratu $[0,1] \times [0,1]$, np. z zastosowaniem jednego ze standardowych generatorów liczb pseudolosowych. Jeżeli i-ty punkt należy do podzbioru S, zmienna losowa X_i przyjmuje wartość 1, w przeciwnym razie jej wartością staje się 0. Niech $X_1, X_2, \ldots$ – ciąg tak zdefiniowanych zmiennych losowych. Dla każdego n określamy zmienną losową
$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$
   (a) Pokazać, że $\mathrm{E}[S_n]$ jest równe polu podzbioru S, a $\mathrm{var}(S_n)$ maleje wraz ze wzrostem n.
   (b) Pokazać, że S_{n-1} i X_n wystarczają do wyznaczenia S_n, tzn. realizacje X_i, $i = 1, \ldots, n-1$ nie muszą być pamiętane. Podać odpowiedni wzór.
   (c) Napisać odpowiedni program komputerowy lub zastosować arkusz kalkulacyjny do wygenerowania S_n dla $n = 1, 2, \ldots, 10000$ dla przypadku, gdy S jest kołem wpisanym w kwadrat jednostkowy.
   (d) W podobny sposób wyznaczyć pole figury składającej się ze wszystkich punktów (x, y) kwadratu jednostkowego spełniających nierówność $0 \leqslant \cos \pi x + \sin \pi y \leqslant 1$.

8. Chcemy ocenić stopień poparcia dla poczynań głowy państwa. W tym celu pytamy n losowo wybranych osób, a ich odpowiedzi modelujemy jako niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o rozkładzie dwupunktowym z parametrem p:
$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i\text{-ta osoba akceptuje działania prezydenta,} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$
Sprawdzić czy zmienna losowa
$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$
jest dobrą oceną rzeczywistego stopnia poparcia p (*Wskazówka:* wyznaczyć $\mathrm{E}[S_n]$ i $\mathrm{var}(S_n)$, sprawdzając jak zachowują się wraz ze wzrostem liczebności próby n).