Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Metody probabilistyczne – ćwiczenia

Zmienne losowe ciągłe

Program ćwiczeń obejmuje następujące zadania:

1. Mierząc rezystancję R rezystorów na linii produkcyjnej, akceptujemy jedynie sztuki z zakresu od 96 do 104 Ω. Określić procent przyjętych jednostek, jeżeli (a) R ma rozkład równomierny w zakresie od 95 do 105 Ω, (b) R ma rozkład normalny $\mathcal{N}(100, 2)$.

2. Niech X – zmienna losowa o rozkładzie
$$f_X(x) = \begin{cases} x/4 & \text{jeżeli } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$
Określić dystrybuantę oraz obliczyć $P(X \geqslant 2)$, $\mathrm{E}[X]$ i $\mathrm{var}(X)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład
$$f_X(x) = \begin{cases} c/x^2 & \text{jeżeli } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$
Określić wartość liczbową c, wyznaczyć dystrybuantę, a następnie obliczyć $P(X > 1.5)$, $E[X]$ i $\mathrm{var}(X)$.

4. Określić gęstość rozkładu prawdopodobieństwa, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X, jeżeli
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a^3}{x^3}, & x \geqslant a \\ 0, & x < a \end{cases}$$
oraz $a > 0$.

5. Rozważmy trójkąt o wysokości h. Niech X oznacza odległość od podstawy punktu losowo wybranego w tym trójkącie. Określić gęstość rozkładu i dystrybuantę X.

6. Dla zmiennej losowej X przybierającej wartości będące nieujemnymi liczbami całkowitymi pokazać, że
$$\mathrm{E}[x] = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geqslant i) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - F_X(i))$$

Tabela 1: **Rozkład normalny:** Wartości funkcji Laplace'a $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	.500	0.50	.691	1.00	.841	1.50	.933	2.00	.977	2.50	.9938	3.00	.9986
0.05	.520	0.55	.709	1.05	.853	1.55	.939	2.05	.980	2.55	.9946	3.05	.9988
0.10	.540	0.60	.726	1.10	.864	1.60	.945	2.10	.982	2.60	.9954	3.10	.9990
0.15	.560	0.65	.742	1.15	.875	1.65	.951	2.15	.984	2.65	.9960	3.15	.9992
0.20	.579	0.70	.758	1.20	.885	1.70	.955	2.20	.986	2.70	.9966	3.20	.9993
0.25	.599	0.75	.773	1.25	.894	1.75	.960	2.25	.988	2.75	.9970	3.25	.9994
0.30	.618	0.80	.788	1.30	.903	1.80	.964	2.30	.989	2.80	.9974	3.30	.9995
0.35	.637	0.85	.802	1.35	.911	1.85	.968	2.35	.991	2.85	.9978	3.35	.9996
0.40	.655	0.90	.816	1.40	.919	1.90	.971	2.40	.992	2.90	.9982	3.40	.9996
0.45	.674	0.95	.829	1.45	.926	1.95	.974	2.45	.993	2.95	.9984	3.45	.9997

7. Medianą zmiennej losowej X jest liczba μ spełniająca $F_X(\mu) = 1/2$. Określić medianę zmiennej losowej o rozkładzie wykladniczym z parametrem λ.

8. Zaproponować metodę generowania liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa na bazie standardowego generatora o rozkładzie równomiernym w przedziale $[0, 1]$ (chodzi o tzw. *metodę odwracania dystrybuanty*).

9. Niech $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ oraz $Y \sim \mathcal{N}(1, 4)$.
   (a) Określić $P(X \leqslant 1.5)$ i $P(X \leqslant -1)$.
   (b) Jaka jest gęstość rozkładu zmiennej $Z = (Y - 1)/2$?
   (c) Określić $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$.

10. Niech $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. Określić prawdopodobieństwa zdarzeń $\{X \geqslant k\sigma\}$ oraz $\{|X| \leqslant k\sigma\}$ dla $k = 1, 2, 3$.

11. Temperatura w pewnym mieście jest modelowana jako zmienna losowa $T \sim \mathcal{N}(10^o, 10^o)$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że temperatura w losowo wybranej chwili czasu nie przekroczy 15^o?

12. Pokazać, że gęstość rozkładu normalnego spełnia warunek normalizacji

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$