Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

Laboratorium modelowania i symulacji

Ćwiczenie 10: Równania różniczkowe — techniki numeryczne

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = yt^2 - 1.2y, \quad y(0) = 1$$

w zakresie od $t = 0$ do 2.

(a) Rozwiązać je analitycznie.

(b) Rozwiązać je w Excelu metodą Eulera dla kroków $h = 0.5$ oraz 0.25. Przedstawić obydwa rozwiązania na jednym wykresie z rozwiązaniem dokładnym.

(c) Rozwiązać je w Excelu metodą Heuna z krokiem $h = 0.5$.

(d) Rozwiązać je w Excelu metodą Rungego z krokiem $h = 0.5$.

2. Powtórzyć poprzednie zadanie dla zagadnienia

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (1 + t)\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$$

Dodatkowo zaimplementować w Excelu schemat Rungego-Kutty czwartego rzędu:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_k, y_k) \\
k_2 &= f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_1 h) \\
k_3 &= f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_2 h) \\
k_4 &= f(t_k + h, y_k + k_3 h)
\end{aligned}$$

3. Zaimplementować w Matlabie metodę Rungego oraz metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu. Sprawdzić je na przykładzie z poprzedniego zadania. Następnie rozwiązać za pomocą tych samych procedur równanie

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 0.5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 7y = 0, \quad y(0) = 4, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

w zakresie od $t = 0$ do 5 z krokiem $h = 0.5$.

4. Poziom wody y w zbiorniku w kształcie walca, z którego woda wypływa przez zawór umieszczony na dnie, opisuje równanie
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{y},$$
gdzie: $k = 0.1$ i czas mierzony jest w minutach. Początkowo poziom wody wynosi 3 m. Rozwiązać to równanie w Excelu z zastosowaniem metody Eulera, z krokiem 0.5 min. Określić czas, po którym zbiornik będzie pusty.

5. Za pomocą funkcji `ode23` dostępnej w Matlabie rozwiązać następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych (tzw. równania Lotki-Volterry):
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1.2x - 0.6xy, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.8y + 0.3xy,$$
przy czym dla $t = 0$ zachodzi $x = 2$ oraz $y = 1$. Przedstawić rozwiązanie w horyzoncie czasowym od $t = 0$ do 20. Narysować wykres parametryczny $(x(t), y(t))$ dla $t \in [0, 20]$.

6. Za pomocą funkcji `ode45` dostępnej w Matlabie rozwiązać następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych (tzw. równanie Van der Pola):
$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2, \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1,$$
przy czym dla $y_1(0) = y_2(0) = 1$. Rozważyć nastepujące sytuacje:
   (a) $\mu = 1$, $t \in [0, 20]$
   (b) $\mu = 1000$, $t \in [0, 3000]$

7. Następujące równania opisują ewolucję koncentracji trzech składników reakcji chemicznej:
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}c_a}{\mathrm{d}t} &= -20c_ac_c + 2c_b\\ \frac{\mathrm{d}c_b}{\mathrm{d}t} &= 20c_ac_c - 2c_b\\ \frac{\mathrm{d}c_c}{\mathrm{d}t} &= -20c_ac_c + 2c_b - 0.2c_c\end{aligned}$$
Rozwiązać je w Matlabie dla początkowych koncentracji $c_a = 500$, $c_b = 0$, $c_c = 500$ i horyzontu czasowego od 0 do 30 s.

8. Ładunek kondensatora w szeregowym obwodzie RLC opisuje równanie
$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = E(t), \quad q(0) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$
gdzie: $L = 1$ H, $C = 0.25$ F, $R = 1\ \Omega$, a źródło zasilające opisuje zależność
$$E(t) = E_0 \sin(\omega t)$$
dla $E_0 = 1$ V, $\omega^2 = 3.5\ \mathrm{s}^2$. Wyznaczyć i przedstawić graficznie rozwiązanie w horyzoncie czasowym od $t = 0$ do 100 s.

9. Rozwiązać równania ruchu suwnicy dźwigowej (zob. slajdy do wykładu nr 11) dla następujących danych: $M = 20$ t, $m = 10$ t, $\ell = 10$ m, $x(0) = 0$, $\theta(0) = 30^\circ$, $u(t) = 0$ w horyzoncie czasowym od $t = 0$ do 10 s.