Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

Laboratorium modelowania i symulacji

Ćwiczenie 11: Równania różniczkowe — zadania dodatkowe

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Sprawdź, że $y = (t/2)\sin^2(t)$ jest rozwiązaniem równania
$$\ddot{y} + 4y = t + \sin(2t).$$

2. Znaleźć całki ogólne poniższych równań:
   (a) $t\dot{y} + 5y = 3t$,
   (b) $\dot{y} + 4y = 2t + 3e^{3t}$,
   (c) $\dot{y} - 2y = te^{3t}$,
   (d) $\dot{y} + 2ty = 3te^{-t^2}$,
   (e) $\dot{y} + \frac{1}{t}y = e^{t^2}$,
   (f) $t\dot{y} + 5y = t^3$,
   (g) $(1 + t^2)\dot{y} + 9y = 0$,
   (h) $\dot{y} - ye^t = 2te^{e^t}$,
   (i) $\dot{y} + y = \sin(t)$,
   (j) $\dot{y} + y\,\mathrm{ctg}(t) = 5e^{\cos(t)}$,
   (k) $\dot{y} + 2y\cos(t) = \sin^2(t)\cos(t)$,

3. Rozwiązać poniższe zagadnienia:
   (a) $\begin{cases} \dot{y} + 4y = 2t + 3e^{t}, \\ y(0) = 5, \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} \dot{y} - 2y = te^{3t}, \\ y(3) = 1, \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} \dot{y} + 2ty = t^3e^{-t^2}, \\ y(0) = 4, \end{cases}$
   (d) $\begin{cases} \dot{y} + \dfrac{1}{t}y = e^{t^2}, \\ y(1) = 2, \end{cases}$
   (e) $\begin{cases} t\dot{y} + 5y = t^3, \\ y(1) = 1, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} (1+t^2)\dot{y} + 9y = 0, \\ y(3) = 1, \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dot{y} - ye^t = 2te^{e^t}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \dot{y} + \dfrac{3}{t}y = \dfrac{\sin(t)}{t^3}, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$

4. Rozwiązać poniższe problemy:

(a) $\begin{cases} \dot{y} = t(1+y^2), \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y\dot{y} = t^2, \\ y(1) = 3, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y^2\dot{y} = e^t, \\ y(1) = 4, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} ty\dot{y} = 1, \\ y(1) = 5, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dot{y} = -\dfrac{t}{y}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} e^t\dot{y} = y, \\ y(0) = 4, \end{cases}$

(g) $\begin{cases} t\dot{y} + \sin(y) = 0, \\ y(1) = \pi, \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \dot{y} = -ty, \\ y(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$

5. Rozwiązać numerycznie poniższe problemy:

(a) $\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{\sin(ty^2)}{t-21}, \\ y(0) = -1, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{y}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{ty}{t^2-1}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{t - \sqrt{1-y^2}}{y}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dot{y} = \log(\sqrt{t^2+y^2}), \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \dot{y} = t^2 + y^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dot{y} = \max(t, y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \dot{y} = (y - t)^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{t^2}{|y|}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$

(j) $\begin{cases} \dot{y} = \operatorname{sgn}(ty)\sqrt{5\log(|y|)}, \\ y(1) = 2, \end{cases}$

(k) $\begin{cases} t\ddot{y} + t\dot{y} + (t^2 - 9)y = 0, \\ \qquad y(1) = 1, \quad \dot{y}(1) = 1, \end{cases}$

(l) $\begin{cases} t^2\ddot{y} + t\dot{y} - (t^2 + 4)y = 0, \\ \qquad y(1) = 0, \quad \dot{y}(1) = 1, \end{cases}$

(m) $\begin{cases} \ddot{y} + \sin(y) = 0, \\ \qquad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \end{cases}$

(n) $\begin{cases} \ddot{y} - t\dot{y} + 7y = 0, \\ \qquad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1, \end{cases}$

(o) $\begin{cases} t\ddot{y} + \left(\dfrac{1}{2} - t\right)\dot{y} - \dfrac{3y}{4} = 0, \\ \qquad y(1) = 1, \quad \dot{y}(1) = 1. \end{cases}$