

Ćwiczenie 3: Wprowadzenie do programu Matlab

1. Wyznaczyć wartość sumy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$$

Jak podzielić tak długą formułę na kilka linii poleceń? Czym różnią się rezultaty operacji 1900/81 oraz 81\1900?

2. Omówić różnice między poleceniami `help` oraz `lookfor`. Na tej podstawie określić nazwy funkcji służących do obliczania pierwiastka (*ang.* `root`), logarytmu (*ang.* `logarithm`) oraz funkcji `arc sin` (polskie „sinus” to po angielsku „sine”). Co uzyskuje się poprzez polecenie `help cedit`?

Bardzo pożytecznym poleceniem przy przeglądaniu pomocy wyświetlanych przez polecenie `help` jest `more`. Proszę zapoznać się z jego składnią i przetestować działanie.

3. Jak w MATLABie definiuje się zmienne? W jaki sposób nadaje się im wartości? Jak wypisać na ekranie monitora aktualną wartość danej zmiennej? Po przypisaniu zmiennym x , y i z wybranych wartości wyznaczyć a i b , jeżeli

(a) $a = \sqrt{|x-1|} - \sqrt[3]{|y|}$, $b = x (\arctan z + e^{-(x+3)})$;

(b) $a = \frac{3 + e^{y-1}}{|y - \tan z|}$, $b = 1 + |y - x| + \frac{(y-x)^2}{2} + \frac{|y-x|^3}{3}$;

(c) $a = (1+y) \frac{x + y/(x^2+4)}{e^{-x-2} + 1/(x^2+4)}$, $b = \frac{1 + \cos(y-2)}{x^4 + \sin^2 z}$;

(d) $a = \frac{2 \cos(x - \pi/6)}{1/2 + \sin^2 y}$, $b = 1 + \tan^2 \frac{z}{2}$;

(e) $a = \ln \left| (y - \sqrt{|x|}) \left(x - \frac{y}{z + x^2/4} \right) \right|$, $b = \cos^2 \left(\arctan \frac{1}{z} \right)$.

Czy MATLAB rozróżnia duże i małe litery?

4. (Kilka uzupełnień) Jaką rolę pełni w MATLABie średnik na końcu wprowadzanego polecenia? Proszę sprawdzić to na przykładzie poleceń

```
>> p = 3.5
```

oraz

```
>> p = 3.5;
```

Co naprawdę reprezentuje sobą napis `ans` wypisywany np. po wprowadzeniu polecenia

```
>> 4 + 3
```

Co powodują polecenia `who` oraz `whos`?

5. Zdefiniować macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

oraz wektor wierszowy $r = [10 \ 11 \ 12]$. Co spowoduje polecenie $A = [A; r]$? Jak w takim razie doprowadzić do tego, aby macierz A miała postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 \\ 4 & 5 & 6 & 14 \\ 7 & 8 & 9 & 15 \\ 10 & 11 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

Na zakończenie proszę jeszcze zinterpretować rezultaty poleceń

```
>> size(A)
```

oraz

```
>> length(r)
```

6. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Obliczyć

- (a) $A + B$
- (b) $A - B$
- (c) $3A + 4B$
- (d) AB
- (e) $A^3 + A^2 - 2A$

7. Dane są tablice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \ 1 \ 5], \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Obliczyć, o ile jest to możliwe, wartości następujących wyrażeń:

$$B + D, \quad 3A, \quad -2C, \quad BA, \quad DB, \quad 2A + B - C, \quad CD - DC, \quad 2B - D, \quad D^2, \quad B^2 + D^2$$

8. Dane są tablice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzić, że zachodzi równość $A(B + C) = AB + AC$.

9. Iloma sposobami można wprowadzić tablicę B o elementach zespolonych:

$$B = \begin{bmatrix} 1 + 5i & 2 + 6i \\ 3 + 7i & 4 + 8i \end{bmatrix}$$

Zmiennej z przypisać wartość elementu znajdującego się w pierwszym wierszu i drugiej kolumnie rozważanej tablicy.

10. Znaleźć odwrotności poniższych macierzy (o ile istnieją). Sprawdzić otrzymane rezultaty.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Wprowadzić wektor x postaci

$$x = \left[-1.3 \quad \sqrt{3} \quad \frac{4}{5}(1+2+3) \right]$$

Co spowoduje polecenie `x(5) = abs(x(1))`?

12. Zapisać wartości wszystkich użytych do tej pory zmiennych na dysku. Ponadto wartość tablic A i x zapisać w pliku *temp.mat*. Zakończyć pracę z programem. Określić format plików, w których zapisano przed chwilą wartości zmiennych (binarny czy tekstowy). Ponownie uruchomić program, a następnie odtworzyć wartości zmiennych, które zapisano w plikach. Jak zmienić format danych zapisywanych w omawiany sposób?

Czym różnią się polecenia `what` i `dir`? Czy polecenie `type` ma jakiś związek z poleceniem DOSa o tej samej nazwie? Skopiować plik *matlab.mat* do pliku *matlab.old* (także bez opuszczania programu!). Sprawdzić, czy operacja zakończyła się oczekiwanym rezultatem. Jak skasować plik *matlab.old*?

13. Do czego służy polecenie `diary`? Wydaje się ono dość przydatne w początkowym etapie nauki poleceń MATLABa.

14. Wprowadzić wektor x za pomocą polecenia

```
>> x = [4\3 1.2345e-6]
```

Sprawdzić, w jaki sposób wypisywana jest jego wartość po wprowadzeniu każdego z poniższych poleceń:

- (a) `format short`
- (b) `format short e`
- (c) `format long`
- (d) `format long e`
- (e) `format bank`
- (f) `format hex`
- (g) `format +`

Proszę zastanowić się nad użytecznością ostatniego z tych poleceń.

Jeszcze jednym poleceniem tego typu jest `format compact`. Porównać sposób wyświetlania informacji na ekranie przed i po jego wprowadzeniu.

15. (Operacja transpozycji) Proszę wprowadzić polecenia

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 0]
>> B = A'
```

Wywnioskować stąd jaką rolę pełni w MATLABie apostrof `'`. Jaki więc będzie rezultat polecenia

```
>> x = [-1 0 2]'
```

16. Rozwiązać poniższe układy równań. Sprawdzić poprawność otrzymanych rezultatów. W jaki sposób można stwierdzić czy układ ma jednoznaczne rozwiązanie, nie posiada rozwiązania lub ma nieskończenie wiele rozwiązań? (*Wskazówka:* przypomnieć sobie twierdzenie Kroneckera-Capelliego.)

$$(a) \begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ x + 4y - 2z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - 4y + 3z - 4w = 2 \\ -x + 3y - 2z + w = 4 \\ 2x - y + z + 2w = 3 \\ x + 2y - z + w = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + 3z^2 = 1 \\ x + y - z^2 = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 6z = 22 \\ 3x + 6y + z = 18 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 7y - 3z = 7 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

17. W MATLABie rozwiązanie układu równań liniowych $Ax = b$ można otrzymać albo stosując metodę eliminacji Gaussa ($x = A \setminus b$), albo korzystając z zależności $x = A^{-1}b$ ($x = \text{inv}(A) * b$). Który z wymienionych sposobów wymaga mniejszego nakładu obliczeń? Odpowiedź sprawdzić na układach równań z poprzedniego zadania poprzez wykorzystaniu funkcji `flops`.

18. Symbolem `.*` oznacza się tzw. mnożenie „element-przez-element” dwóch tablic. Wywnioskować na czym polega ta operacja wprowadzając polecenia

```
>> x = [1 2 3]; y = [4 5 6];
>> z = x .* y
```

Przez analogię określić jaki będzie rezultat poleceń

```
>> z = x .\ y
```

oraz

```
>> z = x .^ y
```

Ponadto zinterpretować wyniki poleceń

```
>> z = x .^ 2
```

oraz

```
>> z = 2 .^ [x y]
```

19. Wykonać obliczenia ręcznie i porównać z rezultatami pracy programu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(a) \quad A .* B' \quad (b) \quad A .\setminus B \quad (c) \quad A .\wedge B$$

20. Liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wartością własną macierzy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, jeśli istnieje taki niezerowy wektor $x \in \mathbb{C}^n$, że zachodzi równość

$$Ax = \lambda x$$

Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym macierzy A przynależnym do λ* . W MATLABie wartości (i opcjonalnie wektory) własne uzyskuje się poprzez wywołanie funkcji `eig`.

Wyznaczyć wartości i wektory własne następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

21. Sprawdzić, że dla $(n \times n)$ -macierzy A zachodzi

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy A .

22. Najczęściej używanymi normami wektora $x \in \mathbb{R}^n$ są

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Indukowane przez nie normy macierzy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ są postaci

$$\|A\|_1 := \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}, \quad \|A\|_\infty := \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

gdzie $\lambda_{\max}(A^T A)$ oznacza największą wartość własną macierzy $A^T A$. Ponadto czasami używa się również tzw. *normy Frobeniusa*:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Wyznaczyć wartości tych norm dla poniższych wektorów i macierzy:

$$[-1, 1, -2]^T, \quad [3, -4, 0, \frac{3}{2}]^T, \quad [2, 1, -3, 4]^T,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proszę wykonać ćwiczenie posługując się wyłącznie funkcjami `max`, `sum`, `abs`, oraz `sqrt`. Następnie zapoznać się z opisem funkcji `norm`. Korzystając z niej sprawdzić, że dla powyższych wektorów i tablic spełnione są tożsamości:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2, \quad \|x\|_2^2 \leq \|x\|_1\|x\|_\infty \leq 0.5(\sqrt{n} + 1)\|x\|_2^2,$$

oraz

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \quad 1/\|A^{-1}\| \leq |\lambda| \leq \|A\|$$

gdzie λ jest dowolną wartością własną macierzy A .

23. Co jest efektem wykonania poniższych instrukcji?

$$(a) \quad x = 1:5 \quad (b) \quad y = 0: \pi/4: \pi \quad (c) \quad z = 6:-1:1$$

Zapisać te same instrukcje przypisania przy użyciu funkcji `linspace`. Utworzyć tablicę, której pierwsza kolumna składa się z punktów $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{15} = 3$ takich, że $x_i - x_{i-1} = 0.2$, $i = 1, \dots, 15$, druga kolumna natomiast — z odpowiednich wartości $y_i = \exp(-x_i) \sin(x_i)$.

24. Wytlumaczyć rezultat poniższego ciągu instrukcji:

```
>> A = [1 2; 3 4; 5 6]
>> A(:) = 11:16
```

25. Dana jest następująca macierz A :

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

Wprowadzić ją używając minimalną liczbę operacji. Przewidzieć rezultat wykonania poniższych operacji, a następnie sprawdzić swoje przypuszczenia przy użyciu komputera.

- | | | |
|------------------------|--|------------------------|
| (a) $A(:,1)$ | (b) $A(2,:)$ | (c) $A(:,2:3)$ |
| (d) $A(2:3,2:3)$ | (e) $A(:,1:2:3)$ | (f) $A(2:3)$ |
| (g) $A(:)$ | (h) $A(:, :)$ | (i) $\text{ones}(2,2)$ |
| (j) $\text{eye}(2)$ | (k) $B = [A, [\text{ones}(2,2); \text{eye}(2)]]$ | (l) $\text{diag}(A)$ |
| (m) $\text{diag}(A,1)$ | (n) $\text{diag}(A,-1)$ | (o) $\text{diag}(A,2)$ |

26. Przy pomocy funkcji `rand` wygenerować macierz A o pięciu wierszach i dziesięciu kolumnach, której elementy będą losowymi liczbami całkowitymi z przedziału $[-10, 10]$.

- Przy pomocy jednej instrukcji odwrócić w A kolejność kolumn (tzn. kolumna pierwsza ma się stać ostatnią, druga — przedostatnią, itd.).
- Przy pomocy jednej instrukcji zamienić miejscami wiersz pierwszy z trzecim.
- Przy pomocy jednej instrukcji zamienić ze sobą kolumny: drugą z czwartą, szóstą z ósmą oraz dziesiątą z pierwszą (jednocześnie!).
- Używając pojęcia macierzy pustej $[]$ usunąć kolumny: piątą, szóstą i dziewiątą.

27. Celem zadania jest pokazanie możliwości operowania funkcjami (np. funkcją *sinus*) w odniesieniu do całych macierzy.

(a) Wprowadzić następującą macierz A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \pi/3 \\ \pi/6 & \pi/2 \end{bmatrix}$$

- Wyznaczyć sinusy poszczególnych elementów i umieścić je w tablicy $B1$.
- Wyznaczyć cosinusy poszczególnych elementów i umieścić je w tablicy $B2$.
- Obliczyć $B1^2 + B2^2$. Zauważyć, że rezultatem nie jest macierz jednostkowa.
- Określić wartości i wektory własne macierzy A ; macierzy wektorów własnych nadać nazwę M , a macierzy wartości własnych — nazwę L .
- Obliczyć $M \sin(L)M^{-1}$.