

Ćwiczenie 5: Umiejętność modelowania

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Które z poniższych wyrażeń

- są rosnące dla wszystkich x ,
- są bardzo duże dla małych x ,
- stają się bardzo małe dla bardzo dużych x , oraz
- są nieograniczone dla dużych x ?

(a) $x + \frac{1}{x}$

(b) $1 - \exp(-x)$

(c) $x \exp(-x)$

(d) $\frac{1}{1 + x^2}$

(e) $\frac{1}{1 + \exp(x)}$

(f) $\frac{1}{1 + \exp(-x)}$

(g) $\frac{\exp(x)}{x^2}$

(h) $\frac{1 + \exp(-x)}{1 - \exp(-x)}$

2. Czy wartości poniższych wyrażeń rosną lub maleją

- gdy a rośnie,
- gdy b rośnie,
- gdy c rośnie?

(a) $\frac{a}{1 + b/c}$

(b) $\frac{b}{c} - a + \frac{b}{a}$

(c) $\frac{abc}{a + bc}$

3. Przeanalizować efekt zmiany parametrów a , b oraz c w poniższych wyrażeniach:

(a) $a + b \exp(-cx)$

(b) $c + ax \exp(-bx)$

4. Zmienna w jest proporcjonalna do x oraz do y . Która z poniższych możliwości poprawnie wyraża tę relację:

(a) $w = a(x + y)$, a — stała,

(b) $w = ax + by$, a, b — stałe,

(c) $w = axy$, a — stała,

5. Zmienna y zależy od dwóch innych zmiennych w oraz z . Wiadomo, że

- Gdy w rośnie, y rośnie.
- Gdy z rośnie, y również rośnie.
- Gdy w i z są jednocześnie równe zeru, y jest też zerem.

Które z poniższych modeli są kompatybilne z powyższymi faktami?

(a) $y = aw + bz$, a, b — stałe dodatnie,

(b) $y = bx - aw + c$, a, b, c — stałe dodatnie,

(c) $y = \frac{cz}{w}$, c — stała dodatnia,

(d) $w = az - bw$, a, b — stałe dodatnie.

6. Gdy płyn przepływa przez rurę, siła tarcia F między ścianą rury a płynem jest proporcjonalna do długości L rury oraz kwadratu prędkości płynu U . Jest ona również odwrotnie proporcjonalna do średnicy rury D . Zapisać wyrażenie na F w funkcji L , U oraz D , obejmujące również stałą k . W jakich jednostkach należy wyrażać k ?

Uwaga! W dalszych zadaniach parametry mają wartości $a = 0.1$, $b = 0.01$, $c = 0.001$, a zmienna x leży w przedziale $[1, 10]$.

7. Zidentyfikować najmniejsze i największe człony w poniższych wyrażeniach:

(a) $\frac{x}{b} + \frac{a}{x} + c$

(b) $\frac{ax}{b} + bx^2 + ab$

(c) $\frac{a}{x} + \frac{bx^3}{a} + \frac{c}{ax^2}$

8. Uprościć następujące wyrażenia przez odrzucenie najmniej istotnych członów:

(a) $x^2 - 2cx + a$

(b) $ac + bx^2 + \frac{a}{x}$

(c) $b \sin(x) + a\sqrt{x}$

9. Uprościć następujące wyrażenia odrzucając wszystkie składniki rzędu 10^{-n} dla $n > 2$:

(a) $bx^3(1 - b^3x + cx - x^2c^2)$

(b) $\frac{b^3 + 2c/x + a^2}{c^3x + b}$

(c) $\sqrt{cx} + c \sin(x) + b \exp(-x)$

10. Możliwie najbardziej uprościć poniższe wyrażenia poprzez pozostawienie tylko największych członów

- (a) $\frac{x^2 + ax}{b + cx + x^2/c}$
- (b) $\frac{(ax + c \sin^2(x))(b^3x + a)}{bx + ac}$
- (c) $\frac{a}{x^2} + \frac{10b}{x} + cx$