Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

Laboratorium modelowania i symulacji

Ćwiczenie 6: Równania różnicowe

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Dla równania różnicowego $X_{n+1} = aX_n + b$ (i) przewidzieć rezultaty oraz (ii) potwierdzić te przypuszczenia z zastosowaniem arkusza kalkulacyjnego poprzez wyznaczenie $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ w każdym z poniższych przypadków:
   (a) $a = 1.2$, $b = 0$, $X_0 = 1$
   (b) $a = 0.4$, $b = 0$, $X_0 = 1$
   (c) $a = 1.2$, $b = -1$, $X_0 = 5$
   (d) $a = 1.2$, $b = -1$, $X_0 = 6$
   (e) $a = 0.8$, $b = 1$, $X_0 = 1$
   (f) $a = 0.8$, $b = 1$, $X_0 = 5$
   (g) $a = 0.8$, $b = 1$, $X_0 = 6$
   (h) $a = -0.1$, $b = 1$, $X_0 = 1$
   (i) $a = -0.5$, $b = 1$, $X_0 = 1$
   (j) $a = -1.2$, $b = 1$, $X_0 = 1$

2. W jeziorze jest aktualnie 10 000 ryb. Gdyby ich nie odławiano, populacja wzrastałaby o 15% rocznie. Rocznie odławia się jednak 2000 ryb, a ponadto śmiertelność ryb jest proporcjonalna do objętości zanieczyszczenia w jeziorze (ze współczynnikiem proporcjonalności k). Początkowo woda jest zanieczyszczona w 5%. Każdego dnia do jeziora wpływa 1000 m^3 czystej wody, a wypływa 1000 m^3 wody zanieczyszczonej. Zapisać równania określające populację ryb F_n oraz ilość zanieczyszczenia w jeziorze P_n.

3. Załóżmy, że w ciągu każdego dnia epidemii
   - x% chorych osób umiera,
   - y% chorych osób zdrowieje i staje się odporna na chorobę,
   - z% podatnych osób zachorowuje.

   Oznaczmy:

   $$\begin{aligned} I_n &= \text{liczba chorych w dniu } n \\ S_n &= \text{liczba osób podatnych w dniu } n \\ R_n &= \text{liczba osób odpornych w dniu } n \end{aligned}$$

   Które z poniższych opcji są zgodne z założeniami (i)–(iii)?

   (a) $I_{n+1} = I_n - (x/100)I_n - (y/100)I_n + (z/100)S_n$

(b) $I_{n+1} = I_n + (x/100)I_n - (y/100)I_n - (z/100)S_n$

(c) $S_{n+1} = S_n - (x/100)I_n - (y/100)I_n + (z/100)S_n$

(d) $R_{n+1} = R_n - (x/100)I_n - (y/100)I_n + (z/100)S_n$

(e) $S_{n+1} = S_n - (z/100)S_n$

(f) $R_{n+1} = R_n + (z/100)I_n$

(g) $R_{n+1} = R_n + (y/100)I_n$

(h) $S_{n+1} = S_n + (y/100)I_n$

4. Dwie sąsienie wyspy A i B mają populacje mew, które stale migrują pomiędzy nimi. Gdyby nie było migracji, przyrosty populacji na A i B wynosiłyby odpowiednio 5% i 3%. Oznaczmy całkowitą liczbę ptaków na A w roku n przez A_n z analogiczną notacją dla B. Załóżmy, że każdego roku ma miejsce stała migracja 1000 ptaków z A do B oraz 800 ptaków w odwrotnym kierunku. Które dwie z poniższych opcji są zgodne z tymi założeniami?

(a) $A_{n+1} = A_n - 1000$

(b) $A_{n+1} = (1.05)A_n$

(c) $B_{n+1} = B_n - 800$

(d) $B_{n+1} = (1.03)B_n$

(e) $A_{n+1} = (1.05)A_n - 200$

(f) $A_{n+1} = (1.05)A_n - 1000$

(g) $B_{n+1} = (1.03)B_n + 200$

(h) $B_{n+1} = (1.03)B_n - 800$

5. Niech

$$\begin{aligned} X_n &= \text{suma długu kredytu mieszkaniowego po } n \text{ latach} \\ m &= \text{rata miesięczna} \\ N &= \text{liczba lat potrzebnych do spłaty kredytu} \\ r &= \text{roczna stopa procentowa} \end{aligned}$$

(a) Zapisać równanie różnicowe spełnione przez X_n.

(b) Użyć arkusza kalkulacyjnego żeby pokazać, że przy stopie 11%, kredycie 50 000 zł oraz okresie spłaty 25 lat, miesięczna spłata wynosi 494.72 zł.

(c) Pokazać, że jeżeli kredyt ma być spłacony dokładnie w N lat, miesięczna rata powinna wynosić

$$m = X_0 \frac{R-1}{12(1-R^{-N})}$$

6. Przypuśćmy, że przepływy z przykładu o dwóch jeziorach przedstawionego na wykładzie nie kompensują się, co oznacza że jeziora nie mają stałej objętości wody. Oznaczmy te objętości przez A_n i B_n. Zapisać odpowiednie równania różnicowe na A_n, B_n, P_n oraz Q_n mając poniższe informacje o dziennych przepływach:

Pierwsze jezioro:	800 m^3 czystej wody wpływa do jeziora
	5 m^3 zanieczyszczenia dostaje się do jeziora
	790 m^3 wody z jeziora wpływa do drugiego jeziora
Drugie jezioro:	1 m^3 zanieczyszczenia dostaje się do jeziora
	800 m^3 wody wypływa z jeziora

7. Szklanka X zawiera 20 łyżek wina, a szklanka Y — 20 łyżek czystej wody. Jedną łyżkę z X dodaje się do Y, którą się miesza. Następnie jedna łyżka mieszanki zostaje przeniesiona do X. Oznaczmy przez X_n i Y_n stężenia wina odpowiednio w szklankach X i Y po n takich zabiegach. Znaleźć

   (a) równanie różnicowe spełnione przez X_n,

   (b) jawne wyrażenia na X_n i Y_n,

   (c) do czego w końcu to doprowadzi.