Modelowanie układów dynamicznych

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wykład 11

Równania Eulera-Lagrange'a

Rozważmy układ p punktów materialnych o współrzędnych uogólnionych q_i i zdefiniujmy lagranżian

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$$

gdzie:

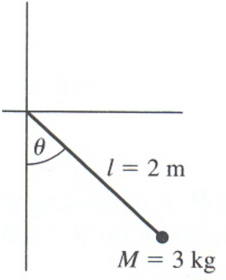
- $\mathcal{K}$ — energia kinetyczna całego układu
- $\mathcal{U}$ — energia potencjalna całego układu

Ruch punktów opisują równania Eulera Lagrange'a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_{q_i}$$

gdzie: F_{q_i} — zewnętrzna siła uogólniona działająca na i-ty punkt.

Przykład 1: wahadło



Energia kinetyczna:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} M \ell^2 \dot{\theta}^2$$

Energia potencjalna

$$\mathcal{U} = Mg\ell(1 - \cos(\theta))$$

gdzie: $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

Stąd

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{K} - \mathcal{U} \\ &= \frac{1}{2} M\ell^2\dot{\theta}^2 - Mg\ell(1-\cos(\theta)) \\ &= 6\dot{\theta}^2 - 60(1-\cos(\theta))\end{aligned}$$

Równanie Eulera-Lagrange'a przybiera postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

skąd

$$12\ddot{\theta} + 60\sin(\theta) = 0$$

czyli

$$\ddot{\theta} = -5\sin(\theta)$$

Stąd

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{K} - \mathcal{U} \\ &= \frac{1}{2} M\ell^2\dot{\theta}^2 - Mg\ell(1 - \cos(\theta)) \\ &= 6\dot{\theta}^2 - 60(1 - \cos(\theta))\end{aligned}$$

Równanie Eulera-Lagrange'a przybiera postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

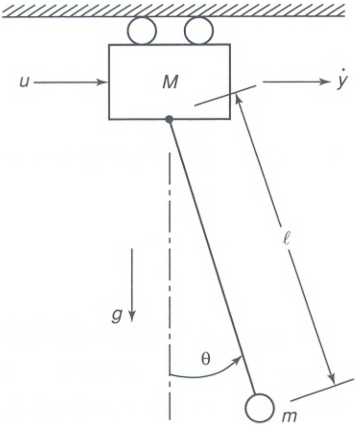
skąd

$$12\ddot{\theta} + 60\sin(\theta) = 0$$

czyli

$$\ddot{\theta} = -5\sin(\theta)$$

Przykład 2: suwnica dźwigowa



Współrzędne środka ciężkości obciążenia:

$$x_m = x + \ell \sin(\theta), \quad y_m = -\ell \cos(\theta)$$

gdzie: x — odcięta środka ciężkości wózka.

Suwnica dźwigowa

Różniczkując otrzymujemy

$$\dot{x}_m = \dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos(\theta), \quad \dot{y}_m = \ell\dot{\theta}\sin(\theta)$$

skąd

$$\begin{aligned} v_m^2 &= (\dot{x}_m)^2 + (\dot{y}_m)^2 \\ &= \left[\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos(\theta)\right]^2 + \left[\ell\dot{\theta}\sin(\theta)\right]^2 \\ &= \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\ell\dot{\theta}\cos(\theta) \end{aligned}$$

i w konsekwencji

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \\ &= \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) \end{aligned}$$

Suwnica dźwigowa

Energia potencjalna wynika z siły przyciągania:

$$\mathcal{U} = -mg\ell\cos(\theta)$$

Lagranżian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + mg\ell\cos(\theta)$$

Współprzędne uogólnione to $\theta(t)$ i $x(t)$. Równania Eulera-Lagrange'a przybierają postać

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = u \end{cases}$$

Suwnica dźwigowa

Energia potencjalna wynika z siły przyciągania:

$$\mathcal{U} = -mg\ell\cos(\theta)$$

Lagranżian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) \\ + mg\ell\cos(\theta)$$

Współprzędne uogólnione to $\theta(t)$ i $x(t)$. Równania Eulera-Lagrange'a przybierają postać

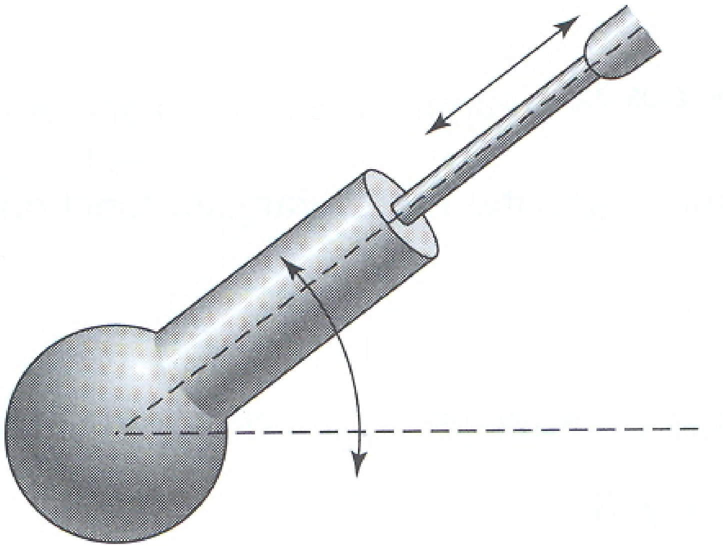
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = u \end{cases}$$

Po obliczeniach otrzymujemy

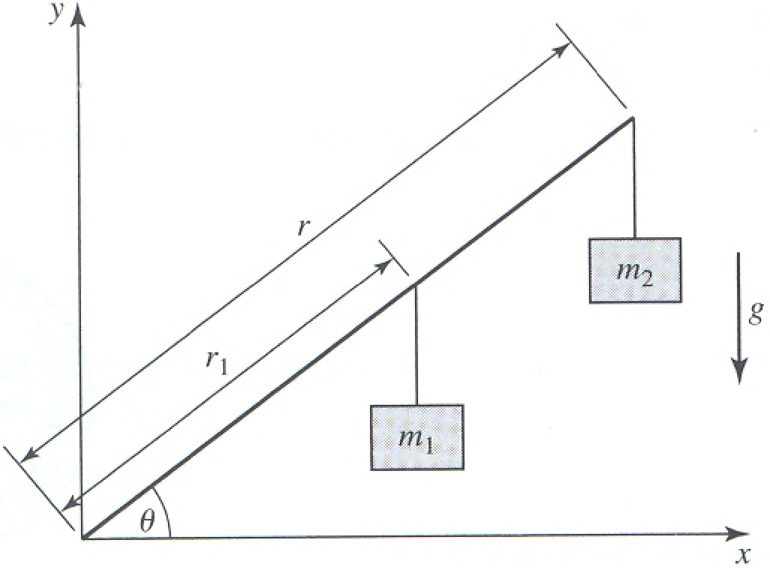
$$
\begin{aligned}
\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos(\theta) &= -g\sin(\theta) \\
(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos(\theta) - m\ell\dot{\theta}^2 sin(\theta) &= u(t)
\end{aligned}
$$

Pytanie: Jak zapisać warunki początkowe?

Przykład 3: Manipulator θ–r



Manipulator θ–r



Oznaczenia modelu punktowego:

- $m_1 = 10\ \mathrm{kg}$ — masa zewnętrznego walca umiejscowiona w jego środku masy,
- $r_1 = 1\ \mathrm{m}$ — odległość między środkiem masy zewnętrznego walca i osią obrotu (jest stała)
- $m_2 = 3\ \mathrm{kg}$ — masa obciążenia umejscowiona na końcu ramienia teleskopowego
- r — odległość od punktowego obciążenia do osi obrotu (zmienna w czasie)
- T_θ — moment obrotowy przyłożony w przegubie obrotowym
- F_r — siła translacyjna w kierunku r

Manipulator θ–r

Różniczkując zależności

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos(\theta) \\ y_1 &= r_1 \sin(\theta) \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -r_1 \dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{y}_1 &= r_1 \dot{\theta} \cos(\theta) \end{aligned}$$

Stąd energia kinetyczna masy m_1 wynosi

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left[r_1^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) + r_1^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) \right] \\ &= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Manipulator θ–r

Podobnie, dla masy m_2 mamy

$$
\begin{aligned}
x_2 &= r\cos(\theta) \\
y_2 &= r\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

i, po zróżniczkowaniu,

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= \dot{r}\cos(\theta) - r\dot{\theta}\sin(\theta) \\
\dot{y}_2 &= \dot{r}\sin(\theta) + r\dot{\theta}\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

Stąd energia kinetyczna masy m_2 wynosi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2}m_2\Big\{\big[\dot{r}\cos(\theta) - r\dot{\theta}\sin(\theta)\big]^2 + \big[\dot{r}\sin(\theta) + r\dot{\theta}\cos(\theta)\big]^2\Big\} \\
&= \frac{1}{2}m_2\big[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big]
\end{aligned}
$$

Manipulator θ–r

Całkowita energia kinetyczna:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right]$$

Energie potencjalne:

$$\mathcal{U}_1 = m_1 g r_1 \sin(\theta), \quad \mathcal{U}_2 = m_2 g r \sin(\theta)$$

skąd całkowita energia potencjalna to

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = m_1 g r_1 \sin(\theta) + m_2 g r \sin(\theta)$$

Lagranżian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{K} - \mathcal{U} \\ &= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\theta}^2 - m_1 g r_1 \sin(\theta) - m_2 g r \sin(\theta) \end{aligned}$$

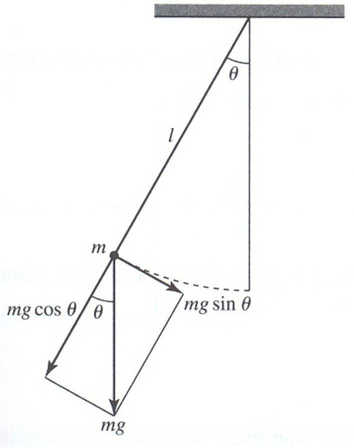
Równania Eulera-Lagrange'a dla współrzędnych θ i r:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = T_\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot r}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = F_r \end{cases}$$

Zapisane w postaci jawnej mają postać

$$\begin{aligned} m_1 r_1^2\ddot\theta + m_2 r^2\ddot\theta + 2m_2 r\dot r\dot\theta + g\cos(\theta)\left[m_1 r_1 + m_2 r\right] &= T_\theta \\ m_2\ddot r - m_2 r\dot\theta^2 + m_2 g\sin(\theta) &= F_r \end{aligned}$$

Rozważmy wahadło



Siła styczna działająca w kierunku położenia równowagi ma postać $F = -mg\sin(\theta)$.

Linearyzacja równań różniczkowych

Z II zasady dynamiki Newtona

$$F = m\ell\ddot{\theta}$$

wynika więc równanie

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta)$$

Ponieważ dla małych wychyleń $\sin(\theta) \approx \theta$, więc

$$F = -mg\sin(\theta) \approx -mg\theta$$

Stąd wynika prostsze równanie liniowe

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta$$

Linearyzacja równań różniczkowych

Z II zasady dynamiki Newtona

$$F = m\ell\ddot{\theta}$$

wynika więc równanie

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta)$$

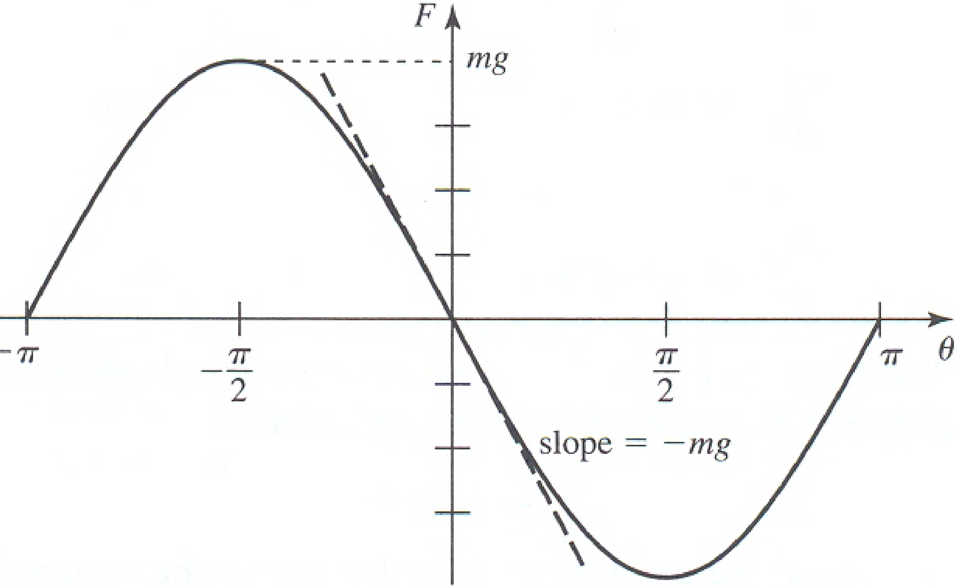
Ponieważ dla małych wychyleń $\sin(\theta) \approx \theta$, więc

$$F = -mg\sin(\theta) \approx -mg\theta$$

Stąd wynika prostsze równanie liniowe

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta$$

Linearyzacja równań różniczkowych



Linearyzacja równań różniczkowych

Z kolei, rozważmy równania ruchu suwnicy dźwigowej:

$$\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos(\theta) = -g\sin(\theta)$$
$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\left[\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2 sin(\theta)\right] = u(t)$$

Dla małych wychyleń zachodzi jednak

$$\sin(\theta) \approx \theta$$
$$\cos(\theta) \approx 1$$
$$\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}\cos(\theta)\right] \approx \ddot{\theta}$$

Pozwala to je istotnie uprościć:

$$\ell\ddot{\theta} + \ddot{x} = -g\theta$$
$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u(t)$$

Linearyzacja równań różniczkowych

Z kolei, rozważmy równania ruchu suwnicy dźwigowej:

$$\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos(\theta) = -g\sin(\theta)$$
$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\Big[\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2 sin(\theta)\Big] = u(t)$$

Dla małych wychyleń zachodzi jednak

$$\sin(\theta) \approx \theta$$
$$\cos(\theta) \approx 1$$
$$\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\dot{\theta}\cos(\theta)\Big] \approx \ddot{\theta}$$

Pozwala to je istotnie uprościć:

$$\ell\ddot{\theta} + \ddot{x} = -g\theta$$
$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u(t)$$

Linearyzacja równań różniczkowych

Z kolei, rozważmy równania ruchu suwnicy dźwigowej:

$$\begin{aligned} \ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos(\theta) &= -g\sin(\theta) \\ (M+m)\ddot{x} + m\ell\left[\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2 sin(\theta)\right] &= u(t) \end{aligned}$$

Dla małych wychyleń zachodzi jednak

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &\approx \theta \\ \cos(\theta) &\approx 1 \\ \ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}\cos(\theta)\right] &\approx \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Pozwala to je istotnie uprościć:

$$\begin{aligned} \ell\ddot{\theta} + \ddot{x} &= -g\theta \\ (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} &= u(t) \end{aligned}$$