Wprowadzenie do Maximy

Maxima dostępna jest na stronie `maxima.sourceforge.net`

1 Obliczenia o dowolnej precyzji

Przypisanie zmiennej `q` wartości pierwiastka z dwóch (polecenie zawsze kończy średnik, a wprowadzamy je naciskając `Shift+Enter`)

```
(%i1) q: 2^(1/2);
```

(%o1) $$\sqrt{2}$$

Wyznaczenie przybliżonej wartości liczbowej

```
(%i2) q, numer;
```

(%o2) $$1.414213562373095$$

To samo, ale z dokładnością 80 cyfr

```
(%i3) bfloat(q), fpprec: 80;
```

(%o3) $$1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070b0$$

Stała π to w Maximie `%pi`

```
(%i4) bfloat(sin(%pi / 9)), fpprec: 60;
```

(%o4) $$3.42020143325668733044099614682259580763083367514160628465048b-1$$

Wartości silni wyznacza się szczególnie prosto

```
(%i5) 60!;
```

(%o5) $$8320987112741390144276341183223364380754172606361245952449277696409600000000000000$$

2 System pomocy

Proszę wypróbować następujace opcje:

```
(%i6) apropos("exp");
```

Poniżej proszę zwrócić uwagę na odstęp po znaku zapytania:

```
(%i7) ? exp;
```

```
(%i8) ?? exp;
```

Poza tym, pomoc uzyskuje się najeżdzając kursorem na nazwę funkcji i naciskając klawisz `F1`.

3 Obliczenia na macierzach

Macierz wprowadzamy wierszami:

```
(%i9) mac: matrix([a, b, c], [b, a, c], [c, b, a]);
```

(%o9)
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Macierz odwrotna

```
(%i10) invert(mac);
```

(%o10)
$$\begin{pmatrix} \frac{a^2-b\,c}{b\,(c^2-a\,b)+a\,(a^2-b\,c)+c\,(b^2-a\,c)} & \frac{b\,c-a\,b}{b\,(c^2-a\,b)+a\,(a^2-b\,c)+c\,(b^2-a\,c)} & \frac{b\,c-a\,c}{b\,(c^2-a\,b)+a\,(a^2-b\,c)+c\,(b^2-a\,c)} \\ \frac{c^2-a\,b}{b\,(c^2-a\,b)+a\,(a^2-b\,c)+c\,(b^2-a\,c)} & \frac{a^2-c^2}{b\,(c^2-a\,b)+a\,(a^2-b\,c)+c\,(b^2-a\,c)} & \frac{b\,c-a\,c}{b\,(c^2-a\,b)+a\,(a^2-b\,c)+c\,(b^2-a\,c)} \\ \frac{b^2-a\,c}{b\,(c^2-a\,b)+a\,(a^2-b\,c)+c\,(b^2-a\,c)} & \frac{b\,c-a\,b}{b\,(c^2-a\,b)+a\,(a^2-b\,c)+c\,(b^2-a\,c)} & \frac{a^2-b^2}{b\,(c^2-a\,b)+a\,(a^2-b\,c)+c\,(b^2-a\,c)} \end{pmatrix}$$

Rozłóżmy na czynniki elementy powyższej macierzy (znak `%` oznacza rezultat ostatniej operacji)

```
(%i11) factor(%);
```

(%o11)
$$\begin{pmatrix} -\frac{b\,c-a^2}{(b-a)\,(c-a)\,(c+b+a)} & \frac{b}{(b-a)\,(c+b+a)} & \frac{c}{(c-a)\,(c+b+a)} \\ \frac{c^2-a\,b}{(b-a)\,(c-a)\,(c+b+a)} & -\frac{c+a}{(b-a)\,(c+b+a)} & \frac{c}{(c-a)\,(c+b+a)} \\ -\frac{a\,c-b^2}{(b-a)\,(c-a)\,(c+b+a)} & \frac{b}{(b-a)\,(c+b+a)} & -\frac{b+a}{(c-a)\,(c+b+a)} \end{pmatrix}$$

Utwórzmy szablon (i, j)-tego elementu macierzy VanderMonde'a:

```
(%i12) h[i, j] := x[i]^(j - 1);
```

(%o12)
$$h_{i,j} := x_i^{j-1}$$

A teraz samą macierz VanderMonde'a

```
(%i13) VanderMonde: genmatrix(h, 5, 5);
```

(%o13)
$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{pmatrix}$$

Obliczmy jej wyznacznik:

```
(%i14) detVanderMonde: determinant(VanderMonde);
```

(%o14)
$$-x_1\left(-x_2^2\left(-x_3^3\left(x_5^4-x_4^4\right)+x_4^3\,x_5^4+x_3^4\left(x_5^3-x_4^3\right)-x_4^4\,x_5^3\right)+x_2^3\left(-x_3^2\left(x_5^4-x_4^4\right)+x_4^2\,x_5^4+x_3^4\left(x_5^2-x_4^2\right)-x_4^4\,x_5^2\right)+\ldots\right.$$

A teraz rozłóżmy to długie wyrażenie na czynniki

```
(%i15) factor(detVanderMonde);
```

(%o15)
$$(x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)\,(x_4-x_1)\,(x_4-x_2)\,(x_4-x_3)\,(x_5-x_1)\,(x_5-x_2)\,(x_5-x_3)\,(x_5-x_4)$$

Utwórzmy szablon macierzy Hilberta

```
(%i16) g[i, j] := 1 / (1 + i + j);
```

(%o16)
$$g_{i,j} := \frac{1}{1+i+j}$$

Tym razem utwórzmy funkcję, która dla danego n zwraca macierz Hilberta o tym rozmiarze (do definicji funkcji stosuje się symbol `:=`)

```
(%i17) Hilbert(n) := genmatrix(g, n, n);
```

(%o17)
$$\mathit{Hilbert}\,(n) := \mathit{genmatrix}\,(g,n,n)$$

Teraz parę wywołań tej funkcji

```
(%i18) invHilbert: invert(Hilbert(4));
```

(%o18)
$$\begin{pmatrix} 1200 & -6300 & 10080 & -5040 \\ -6300 & 35280 & -58800 & 30240 \\ 10080 & -58800 & 100800 & -52920 \\ -5040 & 30240 & -52920 & 28224 \end{pmatrix}$$

```
(%i19) determinant(Hilbert(4));
```

(%o19)
$$\frac{1}{10668672000}$$

```
(%i20) %, numer;
```

(%o20)
$$9.3732378312877175\,10^{-11}$$

```
(%i21) Hilbert(9);
```

(%o21)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{17} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{17} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{17} & \frac{1}{18} & \frac{1}{19} \end{pmatrix}$$

```
(%i22) determinant(%);
```

(%o22)
$$\frac{1}{46206893947914691316295628839036278726983680000000000}$$

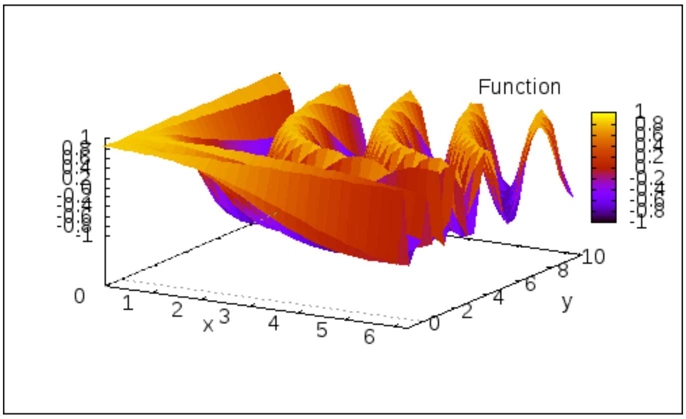
```
(%i23) %, numer;
```

(%o23)
$$2.164179226431492\,10^{-51}$$

4 Wykresy funkcji

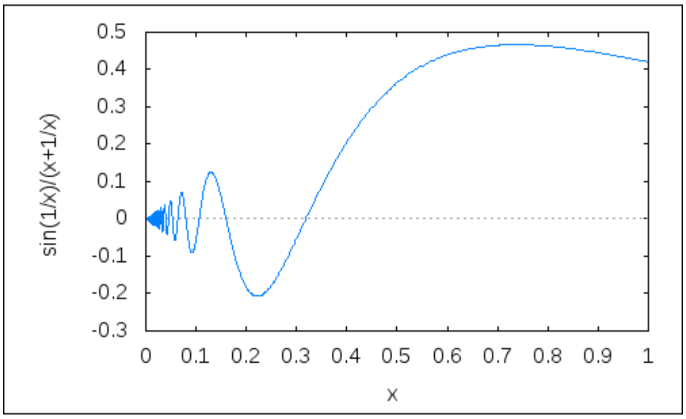
Wykresy funkcji dwóch zmiennych

```
(%i24) wxplot3d(sin(cos(x * log(y^2 + 1/2))), [x, 0, 2 * %pi], [y, -1, 10])$
```

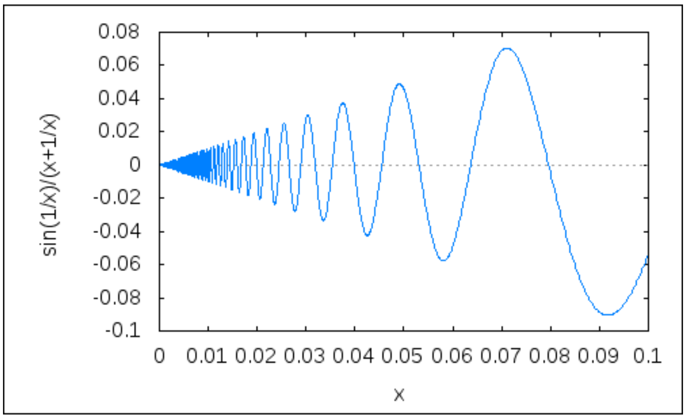
(%t24)


Wykresy funkcji jednej zmiennej

```
(%i25) wxplot2d(sin(1 / x) / (x + 1 / x), [x,10^(-10),1])$
```

(%t25)


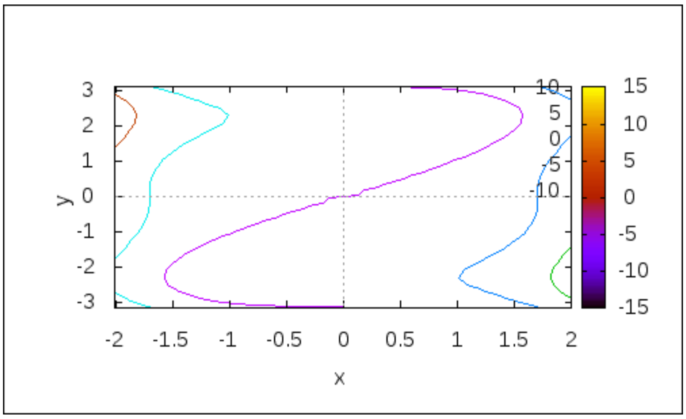
```
(%i26) wxplot2d(sin(1 / x) / (x + 1 / x), [x,10^(-10),0.1])$
```



(%t26)

Wykresy poziomicowe

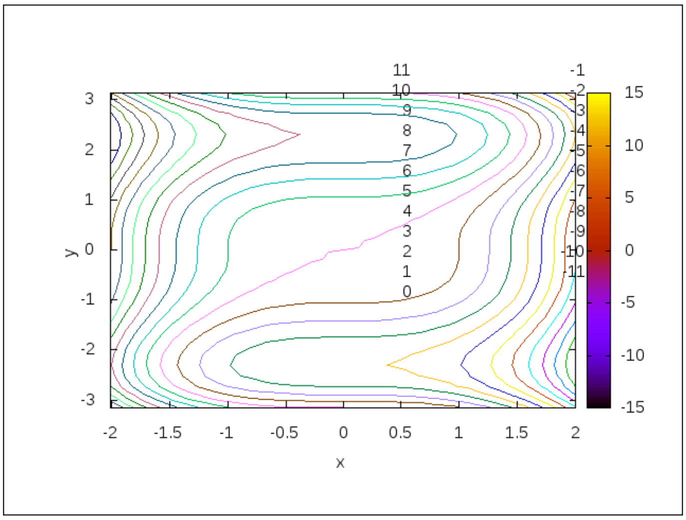
```
(%i27) wxcontour_plot(x^3 - y^2 * sin(y), [x, -2, 2], [y, -%pi, %pi]);
```



(%t27)

(%o27)

```
(%i28) wxcontour_plot(x^3 - y^2 * sin(y), [x, -2, 2], [y, -%pi, %pi],
    [gnuplot_preamble, "set cntrparam levels 30"]);
```



(%t28)

(%o28)

5 Faktoryzacja liczb całkowitych i wielomianów

```
(%i29) fermat: 2^2^6 + 1;
```

(%o29) $$18446744073709551617$$

Rozkład na liczby pierwsze z ich wielokrotnościami

```
(%i30) ifactors(fermat);
```

(%o30) $$[[274177, 1], [67280421310721, 1]]$$

```
(%i31) calkowita: 1115416116555465000000005001;
```

(%o31) $$1115416116555465000000005001$$

```
(%i32) ifactors(calkowita);
```

(%o32) $$[[3, 3], [97, 1], [688957, 1], [618171957203870477, 1]]$$

Do wyznaczenia iloczynów służy funkcja `product`

```
(%i33) wiel: product((x + i!), i, 1, 20);
```

(%o33) $$(x + 1)\ (x + 2)\ (x + 6)\ (x + 24)\ (x + 120)\ (x + 720)\ (x + 5040)\ (x + 40320)\ (x + 362880) \ldots$$

Wymnożenia członów dokonuje expand

```
(%i34) wiel_rozl: expand(wiel);
```

(%o34) $$x^{20} + 2561327494111820313\, x^{19} + 313273851453819662344483252264783076\, x^{18} + \ldots$$

Ponownej faktoryzacji dokona factor

```
(%i35) factor(wiel_rozl);
```

(%o35) $$(x + 1)\ (x + 2)\ (x + 6)\ (x + 24)\ (x + 120)\ (x + 720)\ (x + 5040)\ (x + 40320) \ldots$$

```
(%i36) factor(x^3 + 125); factor(x^3 + 216);
```

(%o36) $$(x + 5)\ \left(x^2 - 5\,x + 25\right)$$

(%o37) $$(x + 6)\ \left(x^2 - 6\,x + 36\right)$$

```
(%i38) factor(x^4 + 2500); factor(x^4 + 5184);
```

(%o38) $$\left(x^2 - 10\,x + 50\right)\ \left(x^2 + 10\,x + 50\right)$$

(%o39) $$\left(x^2 - 12\,x + 72\right)\ \left(x^2 + 12\,x + 72\right)$$

```
(%i40) factor(x^5 + 1); factor(x^5 + 32);
```

(%o40) $$(x + 1)\ \left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1\right)$$

(%o41) $$(x + 2)\ \left(x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 - 8\,x + 16\right)$$

6 Upraszczanie wyrażeń trygonometrycznych

```
(%i42) atryg: cos(3 * x)^2 * sin(2 * x)^3;
```

(%o42) $$\sin(2\,x)^3\cos(3\,x)^2$$

Pozbycie się wielokrotności kątów

```
(%i43) trigexpand(atryg);
```

(%o43) $$8\cos(x)^3\sin(x)^3\left(\cos(x)^3-3\,\cos(x)\,\sin(x)^2\right)^2$$

I znowu powrót do kątów wielokrotnych

```
(%i44) trigreduce(%);
```

(%o44) $$\frac{-\sin(12\,x)-2\,\sin(6\,x)}{16}+\frac{3\,\sin(8\,x)-3\,\sin(4\,x)+6\,\sin(2\,x)}{16}$$

W ten sposób otrzymuje się tzw. postać kanoniczną:

```
(%i45) trigrat(atryg);
```

(%o45) $$-\frac{\sin(12\,x)-3\,\sin(8\,x)+2\,\sin(6\,x)+3\,\sin(4\,x)-6\,\sin(2\,x)}{16}$$

```
(%i46) btryg: cos(2 * x)^2 + 3 + sin(2 * x)^2;
```

(%o46) $$\sin(2\,x)^2+\cos(2\,x)^2+3$$

Uproszczenie z zastosowaniem „jedynki trygonometrycznej”

```
(%i47) trigsimp(btryg);
```

(%o47) $$4$$

7 Całkowanie i różniczkowanie

```
(%i48) funk: x^2 * sin(x / 5) + x - 1;
```

(%o48) $$x^2\,\sin\left(\frac{x}{5}\right)+x-1$$

Całka nieoznaczona $\int \ldots\, \mathrm{d}x$:

```
(%i49) integrate(funk, x);
```

(%o49) $$125\left(\frac{2\,x\,\sin\left(\frac{x}{5}\right)}{5}+\left(2-\frac{x^2}{25}\right)\cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)+\frac{x^2}{2}-x$$

Rezultat sprawdzamy różniczkując go

```
(%i50) diff(%, x);
```

(%o50) $$125\left(\frac{2\,\sin\left(\frac{x}{5}\right)}{5}-\frac{\left(2-\frac{x^2}{25}\right)\sin\left(\frac{x}{5}\right)}{5}\right)+x-1$$

```
(%i51) trigsimp(%);
```

(%o51) $$x^2\,\sin\left(\frac{x}{5}\right)+x-1$$

Całka oznaczona $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

```
(%i52) integrate(1 / x^2, x, 1, inf);
```

(%o52) $$1$$

Czasem całka może po prostu nie istnieć

```
(%i53) integrate(1 / x, 0, inf);
```

Attempt to integrate wrt a number: 0 – an error. To debug this try: debugmode(true);

```
(%i54) g: x^3 * %e^(x) / sin(x)^4;
```

(%o54) $$\frac{x^3\,e^x}{\sin\left(x\right)^4}$$

Rozwinięcie w szereg Taylora

```
(%i55) taylor(g, x, 0, 3);
```

(%o55) $$\frac{1}{x}+1+\frac{7\,x}{6}+\frac{5\,x^2}{6}+\frac{223\,x^3}{360}+\ldots$$

Granica funkcji $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

```
(%i56) limit(sin(x) / x, x, 0);
```

(%o56) $$1$$

8 Rozwiązywanie równań algebraicznych

```
(%i57) solve([3 * x - 5 * y = 2, 8 * x + 2 * y = 3]);
```

(%o57) $$[[y=-\frac{7}{46},x=\frac{19}{46}]]$$

```
(%i58) solve(x^2 - 5 * x - 5 = 0);
```

(%o58) $$[x=-\frac{3\sqrt{5}-5}{2},x=\frac{3\sqrt{5}+5}{2}]$$

Wyznaczmy przybliżenie numeryczne pierwszego pierwiastka

```
(%i59) part(%, 1, 2), numer;
```

(%o59) $$-0.85410196624968$$

Nie każde równanie można rozwiązać analitycznie…

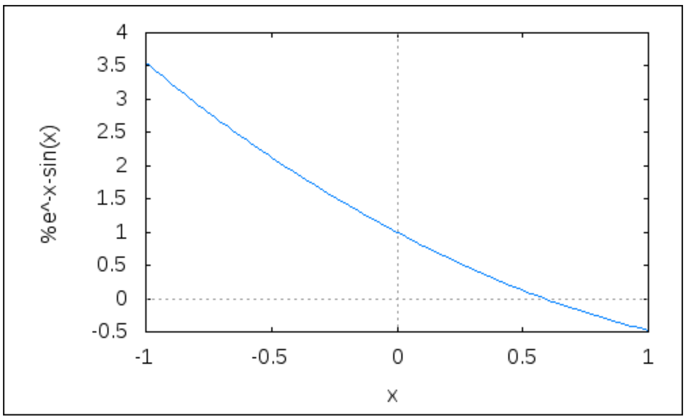
```
(%i60) solve(exp(-x) - sin(x) = 0);
```

(%o60) $$[\sin(x)=e^{-x}]$$

… chociaż pierwiastek istnieje

```
(%i61) wxplot2d(exp(-x) - sin(x), [x, -1, 1])$
```

(%t61)



Wtedy można wyznaczyć pierwiastek w sposób przybliżony

```
(%i62) find_root(exp(-x) - sin(x), x, 0, 1);
```

(%o62) $$0.58853274398186$$