Wprowadzenie do modelowania

Przykłady modelowania

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wykład 2

Prowadzący

prof. dr hab. inż. Dariusz Uciński

pok. 425, bud. A-2
e-mail: d.ucinski@issi.uz.zgora.pl

Literatura

1. Anna Czemplik (2008): *Modele dynamiki układów fizycznych dla inżynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa
2. Stanisław Osowski (2007): *Modelowanie i symulacja układów i procesów dynamicznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa
3. Dilwyn Edwards (2001): *Guide to Mathematical Modeling, 2nd Ed.*, Palgrave, Houndmills

Plan

1. Część 1
   - Ornitologia
   - Projekt wycieraczki samochodowej

2. Część 2
   - Korytarz, drabina i łóżko
   - Gospodarstwo rybacke

Przykład z ornitologii

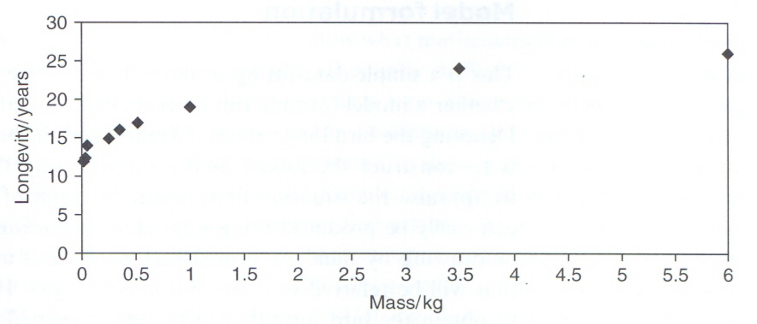
Dane z obserwacji

ptak	masa [kg]	długość życia [lata]
zięba	0.022	12
wróbel	0.027	12.5
zimorodek	0.045	14
sroka	0.25	15
krogulec	0.34	16
gołąb	0.52	17
sokół	1.0	19
bocian	3.5	24
orzeł	6.0	26

Jak długość życia zależy od wagi?

Tworzenie modelu

Wykres punktowy



Tworzenie modelu

Hipoteza

Oznaczenia: M — masa, L — długość życia.
Wykres sugeruje zależność postaci

$$L = aM^b$$

gdzie: a, b — pewne stałe (oczekujemy $b < 1$).

Jak wyznaczyć a i b?

Najprościej odpowiedź uzyskać w Excelu dodając do wykresu linię trendu (zob. plik ptaki.xls).

Tworzenie modelu

Hipoteza

Oznaczenia: M — masa, L — długość życia.
Wykres sugeruje zależność postaci

$$L = aM^b$$

gdzie: a, b — pewne stałe (oczekujemy $b < 1$).

Jak wyznaczyć a i b?

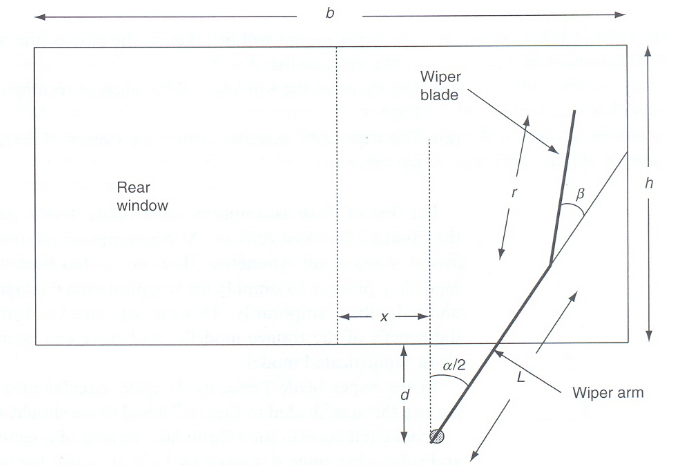
Najprościej odpowiedź uzyskać w Excelu dodając do wykresu linię trendu (zob. plik ptaki.xls).

Plan

1. Część 1
   - Ornitologia
   - Projekt wycieraczki samochodowej
2. Część 2
   - Korytarz, drabina i łóżko
   - Gospodarstwo rybacke

Powierzchnia A czyszczona na tylnej szybie = ?

Oznaczenia



Tworzenie modelu

Założenia upraszczające

1. Wycieraczkę zamontowano na brzegu szyby, tzn. $d = 0$.
2. Szyba ma kształt prostokąta.
3. Ramię odchyla się symetrycznie od pionu w zakresie kątów $\pm\alpha/2$.

Przypomnijmy, że pole wycinka koła o promieniu a i kącie θ wynosi

$$\frac{1}{2}a^2\theta$$

Tworzenie modelu

Założenia upraszczające

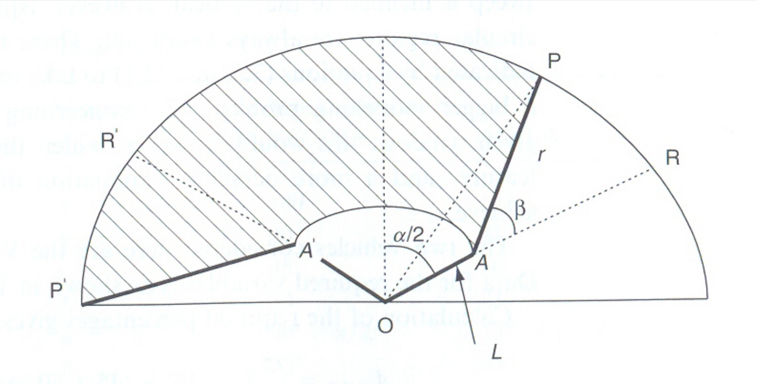
1. Wycieraczkę zamontowano na brzegu szyby, tzn. $d = 0$.
2. Szyba ma kształt prostokąta.
3. Ramię odchyla się symetrycznie od pionu w zakresie kątów $\pm\alpha/2$.

Przypomnijmy, że pole wycinka koła o promieniu a i kącie θ wynosi

$$\frac{1}{2}a^2\theta$$

Tworzenie modelu

Sytuacja po uproszczeniach



Tworzenie modelu

Powierzchnia czyszczona A

Mamy

$$A = \frac{1}{2}(\mathrm{OP}^2)\alpha - \frac{1}{2}(\mathrm{OA}^2)\alpha$$

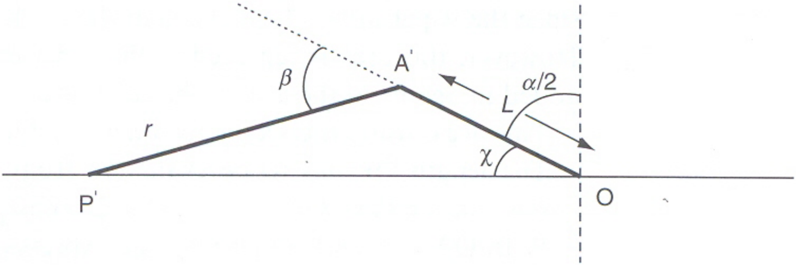
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta OAP wynika

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}^2 &= L^2 + r^2 - 2Lr\cos(\pi - \beta) \\ &= L^2 + r^2 + 2Lr\cos(\beta) \end{aligned}$$

Ponieważ $\mathrm{OA} = L$, otrzymuje się

$$A = \frac{\alpha}{2} r(r + 2L\cos(\beta)).$$

Ograniczenia na kąty



Uwzględnienie dolnej krawędzi szyby

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta A'OP' wynika

$$\frac{r}{\sin(\chi)} = \frac{L}{\sin(\beta - \chi)}$$

Ograniczenia na kąty

Wygodniejsza postać tego ograniczenia

Korzystając z zależności

$$\begin{aligned} \sin(\chi) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin(\beta - \chi) &= \sin\left(\beta - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= -\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \sin(\beta)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos(\beta)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

można to ograniczenie zapisać jako

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{L + r\cos(\beta)}{r\sin(\beta)} \tag{1}$$

Ograniczenia na kąty c.d.

Uwzględnienie prawej krawędzi szyby

$$x + L\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \beta\right) \leqslant \frac{b}{2}$$

Uwzględnienie górnej krawędzi szyby

$$L\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \beta\right) - d \leqslant \frac{h}{2}$$

Ilustracja: Opel Vectra i Opel Agila

Dane rzeczywiste w cm

symbol	VECTRA	AGILA
b	100	107
h	80	45
r	45	36
L	30	23
α	$90^\circ = \pi/2$	$135^\circ = 3\pi/4$
β	35°	35°
x	20	10

Ilustracja: Opel Vectra i Opel Agila

Powierzchnie bezwzględne

$$A_{\text{vectra}} = \frac{\pi}{4} \times 45 \times (45 + 60\cos(35^\circ)) = 3328\ \mathrm{cm}^2$$
$$A_{\text{agila}} = \frac{3\pi}{4} \times 36 \times (36 + 46\cos(35^\circ)) = 3125\ \mathrm{cm}^2$$

Powierzchnie względne

$$A_{\text{vectra},\%} = \frac{3328}{100 \times 80} \times 100\% = 42\%$$
$$A_{\text{agila},\%} = \frac{3125}{107 \times 45} \times 100\% = 65\%$$

Ilustracja: Opel Vectra i Opel Agila

Graniczny kąt obrotu, zob. równanie (1)

$$\text{Vectra:} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{30 + 45\cos(35^\circ)}{45\sin(35^\circ)} = 2.59$$

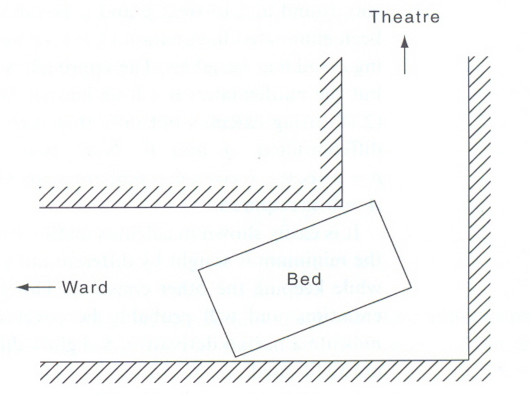
$$\text{Agila:} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{23 + 36\cos(35^\circ)}{36\sin(35^\circ)} = 2.54$$

Oznacza to maksymalną wartość $\alpha/2$ jako ok. 68°.

Plan

Problem docelowy

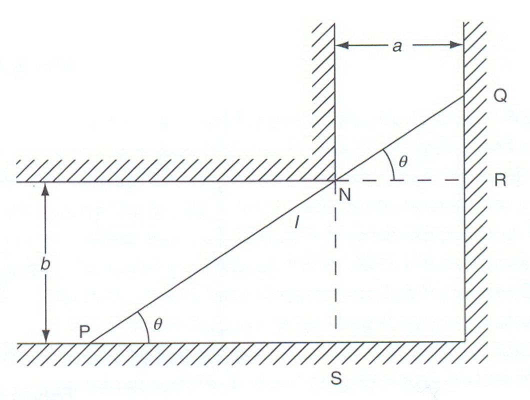
Transport łóżka szpitalnego



Zadanie: Określić maksymalne rozmiary łóżka, które można przewieźć.

Problem prostszy

Przenoszenie drabiny



Zadanie: Określić maksymalną długość drabiny, które można przenieść.

Problem prostszy

Rozwiązanie

Z trygonometrii mamy $\mathrm{PN} = \mathrm{SN}/\cos(\theta)$ oraz $\mathrm{QN} = \mathrm{RN}/\sin(\theta)$, co daje

$$\ell = \mathrm{PN} + \mathrm{QN} = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta} \tag{2}$$

W punkcie minimum $\ell = \ell(\theta)$ zachodzi

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

Różniczkując, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} = \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

Problem prostszy

Rozwiązanie c.d.

Przyrównanie do zera prowadzi do wyrażenia

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$$

Wykorzystujemy to do otrzymania

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \operatorname{tg}^2\theta = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \operatorname{ctg}^2\theta = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2/3}$$

Problem prostszy

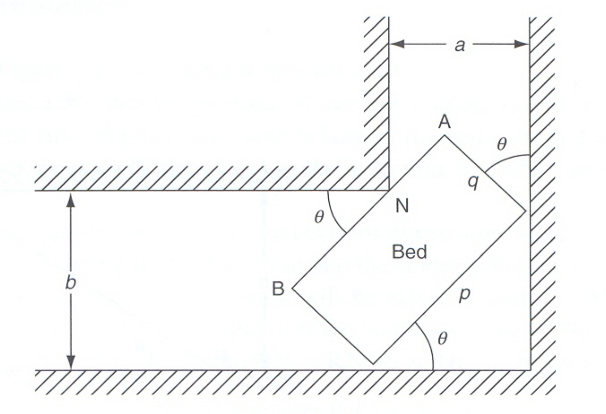
Rozwiązanie c.d.

Pierwiastkując i podstawiając ten rezultat do (2) mamy formułę na poszukiwaną maksymalną długość drabiny:

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta} \\ &= a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}} + b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2/3}} \\ &= (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}\end{aligned}$$

Problem oryginalny

Transport łóżka



Zadanie: Określić maksymalne rozmiary łóżka, które można przewieźć.

Problem oryginalny

Rozwiązanie

Pole A zajmowane przez łóżko wyraża wzór $A = p \times q$
Ponieważ $\mathrm{AB} = \mathrm{AN} + \mathrm{NB}$, mamy

$$p = \underbrace{\frac{a - q \sin\theta}{\cos\theta}}_{\mathrm{AN}} + \underbrace{\frac{b - q \cos\theta}{\sin\theta}}_{\mathrm{NB}}$$

Stąd

$$A = q\left[\frac{a - q \sin\theta}{\cos\theta} + \frac{b - q \cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

Zadanie sprowada się do minimalizacji $A = A(q, \theta)$. Ale jak określić minimum funkcji dwóch zmiennych?

Problem oryginalny

Rozwiązanie c.d.

Wyznaczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{a - q\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{(b - q\cos\theta)}{\sin\theta} + \left(-\frac{sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) q$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \left[\frac{a - q\sin\theta}{\cos\theta}\operatorname{tg}\theta - q\frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{(b - q\cos\theta)}{\sin\theta}\operatorname{ctg}\theta + q\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\right] q$$

Problem oryginalny

Rozwiązanie c.d.

Przyrównując otrzymane pochodne do zera i porządkują otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a \sin\theta + b\cos\theta = 2q \\ b\cos^3\theta - a\, sin^3\theta = q\cos 2\theta \end{cases}$$

Rozwiązanie go ze względu na q i θ daje

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad p = \sqrt{a^2+b^2}$$

Plan

1. Część 1
   - Ornitologia
   - Projekt wycieraczki samochodowej

2. Część 2
   - Korytarz, drabina i łóżko
   - Gospodarstwo rybacke

Hodowla łososia

Sformułowanie problemu

Przyjmijmy trzy kategorie ryb

Ryby w zakresie wieku $(0, 1)$	młode	Y_n
Ryby w zakresie wieku $(1, 2)$	dorosłe	A_n
Ryby w zakresie wieku > 2	dojrzałe	M_n

Jednostką czasu jest jeden rok. Y_n oznacza liczbę ryb (w setkach) w roku n, itd.

Założenia:

- 80% z Y dożywa następnej kategorii A,
- 75% z A dożywa kategorii M,
- 40% z M dożywa kolejnego roku,
- liczba urodzeń jest proporcjonalna do podwojnej liczebności A oraz do liczbności M.

Hodowla łososia

Sformułowanie problemu

Przyjmijmy trzy kategorie ryb

Ryby w zakresie wieku $(0, 1)$	młode	Y_n
Ryby w zakresie wieku $(1, 2)$	dorosłe	A_n
Ryby w zakresie wieku > 2	dojrzałe	M_n

Jednostką czasu jest jeden rok. Y_n oznacza liczbę ryb (w setkach) w roku n, itd.

Założenia:

- 80% z Y dożywa następnej kategorii A,
- 75% z A dożywa kategorii M,
- 40% z M dożywa kolejnego roku,
- liczba urodzeń jest proporcjonalna do podwojnej liczebności A oraz do liczbności M.

Hodowla łososia

Sformułowanie problemu

Prowadzi to do równań

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= 2A_n + M_n \\ A_{n+1} &= 0.8Y_n \\ M_{n+1} &= 0.75A_n + 0.4M_n \end{aligned}$$

lub w zapisie macierzowym

$$\begin{pmatrix} Y \\ A \\ M \end{pmatrix}_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.4 \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} Y \\ A \\ M \end{pmatrix}_{n}$$

gdzie R — macierz Lesliego.

Hodowla łososia

Sformułowanie problemu

Symulacje w Excelu dla $Y_0 = 100$, $A_0 = 50$ oraz $M_0 = 20$ zawiera plik *ryby.xls*.
Pytanie: Czy istnieje stan ustalony?

Rozwiązanie

Stan ustalony oznacza, że wartości Y_n, A_n i M_n stabilizują się na pewnych stałych poziomach Y, A i M dla wystarczająco dużych n. Prowadzi to do układu równań

$$Y = \alpha A + \beta M$$
$$A = 0.8Y$$
$$M = 0.75A + 0.4M$$

Hodowla łososia

Sformułowanie problemu

Symulacje w Excelu dla $Y_0 = 100$, $A_0 = 50$ oraz $M_0 = 20$ zawiera plik *ryby.xls*.

Pytanie: Czy istnieje stan ustalony?

Rozwiązanie

Stan ustalony oznacza, że wartości Y_n, A_n i M_n stabilizują się na pewnych stałych poziomach Y, A i M dla wystarczająco dużych n. Prowadzi to do układu równań

$$
\begin{aligned}
Y &= \alpha A + \beta M \\
A &= 0.8Y \\
M &= 0.75A + 0.4M
\end{aligned}
$$

Hodowla łososia

Rozwiązanie

Jego rozwiązanie implikuje warunek

$$0.8\alpha + \beta = 1$$

Istnienie stanu ustalonego gwarantują więc np. parametry $\alpha = 1$ oraz $\beta = 0.2$.

Ważne pytanie: Jak zmodyfikować powyższy model, żeby uwzględnić odławanie dorosłych i dojrzałych ryb?