

# Metodologia modelowania

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych  
Uniwersytet Zielonogórski

Wykład 3

# Plan

- 1 Część 1
  - Przykłady motywujące
  - Metodologia w praktyce
- 2 Część 2
  - Umiejętność modelowania

# Przykład 1

## Idea Centrum Zdrowia

Władze małego miasta otrzymały projekt budowy Centrum Zdrowia, w którym skupionoby pod jednym dachem zarówno wszystkich lekarzy, jak i farmaceutów pracujących w tym mieście.

*Pytanie:* Jak ocenić efektywność nowego systemu **przed decyzją** o budowie?

*Przykładowe wskaźniki efektywności:* średni czas pobytu pacjenta w centrum, średnia liczba pacjentów przyjmowana w ciągu dnia, ...

## Przykład 2

### Gazociąg

Na Bałtyku odkryto duże złoża gazu. Istnieje kilka konkurujących projektów gazociągu dystrybującego gaz po kraju.

*Pytanie:* Jak wariant wybrać, aby zaspokoić potrzeby klientów przy uwzględnieniu ograniczeń ekonomiczności?

Należy uwzględnić m.in. zależność zapotrzebowania na gaz od pory roku i pogody.

# Plan

- 1 Część 1
  - Przykłady motywujące
  - Metodologia w praktyce
  
- 2 Część 2
  - Umiejętność modelowania

# Spacer w deszczu

## Sformułowanie problemu

Zapowiada się na deszcz, a Ty masz do przejścia 1 km z domu na uczelnię. W pośpiechu nie wzięłaś parasolki. Zaczyna mocno padać, a Ty nie masz czasu na powrót. Jak mocno zmokniesz? Czy można zaproponować strategię, żeby jak najmniej zmoknąć?

## Krok 1: Zidentyfikuj problem rzeczywisty

Model deterministyczny zależy od następujących czynników:

- 1 Jak szybko pada?
- 2 Jaki jest kierunek wiatru?
- 3 Jak długa jest droga i jak szybko biegniesz?

# Spacer w deszczu

## Sformułowanie problemu

Zapowiada się na deszcz, a Ty masz do przejścia 1 km z domu na uczelnię. W pośpiechu nie wzięłeś parasolki. Zaczyna mocno padać, a Ty nie masz czasu na powrót. Jak mocno zmokniesz? Czy można zaproponować strategię, żeby jak najmniej zmoknąć?

## Krok 1: Zidentyfikuj problem rzeczywisty

Model deterministyczny zależy od następujących czynników:

- 1 Jak szybko pada?
- 2 Jaki jest kierunek wiatru?
- 3 Jak długa jest droga i jak szybko biegniesz?

# Spacer w deszczu

## Krok 1: Zidentyfikuj problem rzeczywisty

Dostępne dane:

$$\text{szybkość spaceru} = 2 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{szybkość biegu} = 6 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{odległość} = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$\text{szybkość deszczu} = 4 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{intensywność opadu} = 2 \text{ cm h}^{-1}$$



# Spacer w deszczu

## Krok 2: Sformułuj model matematyczny

Zacznijmy od najprostszego. Załóż, że biegniesz przez całą odległość. Stąd

$$\begin{aligned}\text{czas spędzony w deszczu} &= \frac{1000}{6} \text{ s} \\ &\approx 167 \text{ s} = 2 \text{ min } 47 \text{ s}\end{aligned}$$

Zaniedbaj kierunek deszczu i uwzględnij jedynie intensywność  $2 \text{ cm h}^{-1}$ , tzn.  $2/3600 \text{ cm s}^{-1}$ :

$$\begin{aligned}\text{ilość zebranego deszczu na jedn. pow.} &= \frac{2 \times 167}{3600} \text{ cm} \\ &= \frac{2 \times 167 \times 0.01}{3600} \text{ m}\end{aligned}$$

# Spacer w deszczu

## Krok 2: Sformułuj model matematyczny c.d.

Założ, że ciało człowieka to prostopadłościan o wymiarach  $1.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \text{powierzchnie przednia i tylna} &= 1.5 \times 0.5 \times 2 \\ &= 1.5 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{powierzchnie boczne} &= 1.5 \times 0.2 \times 2 \\ &= 0.6 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{powierzchnia górna} &= 0.5 \times 0.2 \\ &= 0.1 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\text{powierzchnia całkowita} = 2.2 \text{ m}^2$$

# Spacer w deszczu

## Krok 2: Sformułuj model matematyczny c.d.

W rezultacie,

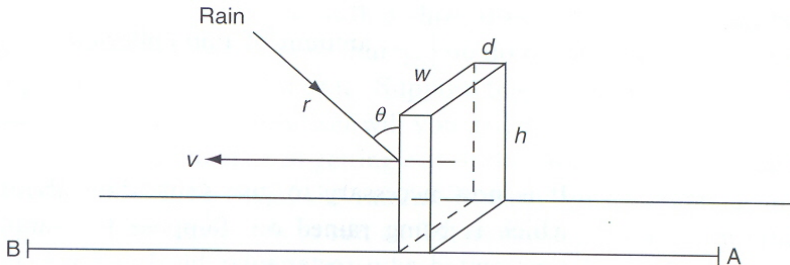
$$\begin{aligned}\text{objętość zebranej wody} &= \frac{2 \times 167 \times 0.01 \times 2.2}{3600} \text{ m}^2 \\ &= 2.041 \times 10^3 \text{ cm}^3 \\ &= 2.041 \text{ litrów}\end{aligned}$$

czyli ponad dwie butelki wina!

*Pytanie:* Czy ten rezultat można udokładnić?

# Spacer w deszczu

## Krok 2: Sformułuj model matematyczny (jeszcze raz)



# Spacer w deszczu

## Lista czynników

Opis	Symbol	Jednostka
czas przemieszczania się	$t$	s
prędkość deszczu	$r$	$\text{m s}^{-1}$
kąt padania	$\theta$	deg
Twoja prędkość	$v$	$\text{m s}^{-1}$
Twoje wymiary:		
wysokość	$h$	m
szerokość	$w$	m
głębokość	$d$	m
zebrana woda	$C$	l
współczynnik intensywności opadu	$I$	—
przebyta odległość	$D$	m

# Spacer w deszczu

## Współczynnik $I$

Deszcz jest strumieniem kropeł, a nie ciągłym przepływem wody. Mamy

$$\begin{aligned}\text{szybkość deszczu} &= 4 \text{ m s}^{-1} \\ &= 400 \times 3600 \text{ cm h}^{-1} \\ &= 1.44 \times 10^6 \text{ cm h}^{-1}\end{aligned}$$

co różni się od intensywności opadu równej  $2 \text{ cm h}^{-1}$ . Stąd współczynnik intensywności wynosi

$$I = \frac{2}{1.44 \times 10^6} = \frac{1}{7.2 \times 10^5}$$

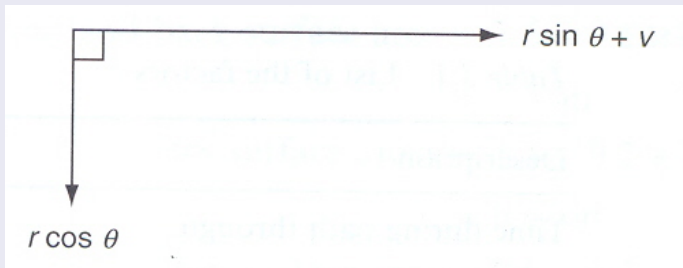
# Spacer w deszczu

## Krok 2: Sformułuj model matematyczny c.d.

Mamy

$$\text{czas spędzony w deszczu} = \frac{D}{v} \quad (\text{s})$$

Rozłóż prędkość deszczu względem Ciebie na dwie składowe:



Wynika stąd, że mokre stawać się będą jedynie powierzchnie: przednia i górna.

# Spacer w deszczu

## Krok 3: Wyznacz rozwiązanie

Najpierw rozważ ile pada z góry:

$$\text{górna powierzchnia} = wd \quad (\text{m}^2)$$

Stąd

$$\begin{aligned} \text{szybk. zbierania deszczu} &= \text{intens.} \times \text{pow.} \times \text{szybk. deszczu} \\ &= lwdr \cos \theta \quad (\text{m}^3 \text{ s}^{-1}) \end{aligned}$$

W czasie  $D/v$  mamy

$$\text{ilość zebranej wody} = \frac{lwdDr \cos \theta}{v} \quad (\text{m}^3)$$



# Spacer w deszczu

## Krok 3: Wyznacz rozwiązanie c.d.

Teraz rozważ ile pada z przodu:

$$\text{przednia powierzchnia} = wh \quad (\text{m}^2)$$

Stąd

$$\begin{aligned} \text{szybk. zbierania deszczu} &= \text{intens.} \times \text{pow.} \times \text{szybk. deszczu} \\ &= lwh(r \sin \theta + v) \quad (\text{m}^3 \text{s}^{-1}) \end{aligned}$$

W czasie  $D/v$  mamy

$$\text{ilość zebranej wody} = \frac{lwhD(r \sin \theta + v)}{v} \quad (\text{m}^3)$$

# Spacer w deszczu

## Krok 3: Wyznacz rozwiązanie c.d.

Sumując te wyniki, otrzymujemy całkowitą ilość deszczu

$$\begin{aligned} C &= \frac{l w D}{v} [r d \cos \theta + h(r \sin \theta + v)] \quad (\text{m}^3) \\ &= \frac{0.8 \cos \theta + 6 \sin \theta + 1.5 v}{1.44 \times 10^3 v} \quad (\text{m}^3) \end{aligned}$$

*Pytanie:* Mając dane  $\theta$ , jak wybrać  $v$  żeby zminimalizować  $C$ ?

# Spacer w deszczu

## Krok 4: Zinterpretuj rozwiązanie

Jeżeli  $\theta = 0^\circ$ , to

$$C = \frac{0.8 + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v} \quad (\text{m}^3)$$

To wyrażenie jest tym mniejsze, im większe  $v$ , skąd trzeba wziąć największą możliwą wartość, tzn.  $v = 6$ , dla której

$$C = \frac{9.8}{1.44 \times 10^3 \times 6} \quad (\text{m}^3)$$

$\approx 1.13$  litrów

# Spacer w deszczu

## Krok 4: Zinterpretuj rozwiązanie c.d.

Jeżeli  $\theta = 30^\circ$ , to

$$C = \frac{0.4\sqrt{3} + 3 + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v} \quad (\text{m}^3)$$

Znowu, to wyrażenie jest najmniejsze dla  $v = 6$ , co daje

$$\begin{aligned} C &= \frac{0.4\sqrt{3} + 3 + 9}{1.44 \times 6} \quad (\text{litrów}) \\ &\approx 1.47 \text{ litrów} \end{aligned}$$

# Spacer w deszczu

## Krok 4: Zinterpretuj rozwiązanie c.d.

Weźmy jeszcze pod uwagę ujemne kąty, tzn. załóżmy  $\theta = -\alpha$  dla  $\alpha > 0$ . Wtedy

$$C = \frac{0.8 \cos \alpha - 6 \sin \alpha + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v} \quad (\text{m}^3)$$

Problemem jest to, że to wyrażenie może stać się ujemne dla wystarczająco dużych  $\alpha$ .

Przyglądnijmy się temu bliżej. Trzeba rozważyć dwa przypadki. Po pierwsze, gdy  $v < r \sin \alpha$ , deszcz pada *na plecy*, a to oznacza tam

$$\text{ilość zebranej wody} = \frac{lwhD(r \sin \alpha - v)}{v} \quad (\text{m}^3)$$

# Spacer w deszczu

## Krok 4: Zinterpretuj rozwiązanie c.d.

W konsekwencji,

$$\begin{aligned} C &= \frac{l w D}{v} [r d \cos \alpha + h(r \sin \alpha - v)] \quad (\text{m}^3) \\ &= \frac{0.8 \cos \alpha + 1.5(4 \sin \alpha - v)}{1.44 \times 10^3 v} \quad (\text{m}^3) \end{aligned}$$

Gdy zwiększysz szybkość do  $4r \sin \alpha$ ,  $C$  redukuje się do

$$\frac{0.8 \cos \alpha}{1.44 \times 10^3 \times 4 \sin \alpha}$$

co odpowiada sytuacji, gdy deszcz pada tylko z góry.

# Spacer w deszczu

## Krok 4: Zinterpretuj rozwiązanie c.d.

Gdy więc deszcz pada pod kątem  $30^\circ$  od tyłu, powinieneś biec z prędkością  $4 \sin 30^\circ = 2 \text{ m s}^{-1}$ , a wtedy

$$C = \frac{0.8\sqrt{3}}{2.88 \times 10^3 \times 2} \text{ (m}^3\text{)} \approx 0.24 \text{ litrów}$$

Drugi przypadek to  $v > r \sin \alpha$ , kiedy

$$\text{ilość zebranej wody} = \frac{lwhD(v - r \sin \alpha)}{v} \text{ (m}^3\text{)}$$

W konsekwencji,

$$C = \frac{lwD}{v} [rd \cos \alpha + h(v - r \sin \alpha)] \text{ (m}^3\text{)}$$

# Spacer w deszczu

## Krok 4: Zinterpretuj rozwiązanie c.d.

Gdy  $v = 6$  oraz  $\alpha = 30^\circ$ ,

$$C = \frac{0.5 \times 1000(0.4\sqrt{3} + 6)}{7.2 \times 10^5 \times 6} \quad (\text{m}^3)$$

$\approx 0.77$  litrów

## Krok 5: Porównaj z rzeczywistością

Konkluzje:

- Gdy deszcz pada w Twoim kierunku, biegnij najszybciej jak możesz.
- Gdy deszcz pada od tyłu, staraj się biec z deszczem.



# Plan

- 1 Część 1
  - Przykłady motywujące
  - Metodologia w praktyce
- 2 Część 2
  - Umiejętność modelowania

# Określenie czynników

## Klasyfikacje

### Czynniki

- ilościowe
- jakościowe

### Czynniki ilościowe

- zmienne
- parametry (stała wartość dla danego problemu, ale mogą się zmieniać od problemu do problemu, np. gęstość)
- stałe (np. prędkość światła)

# Określenie czynników

## Klasyfikacje

### Zmienne

- ciągłe
- dyskretne

### Zmienne

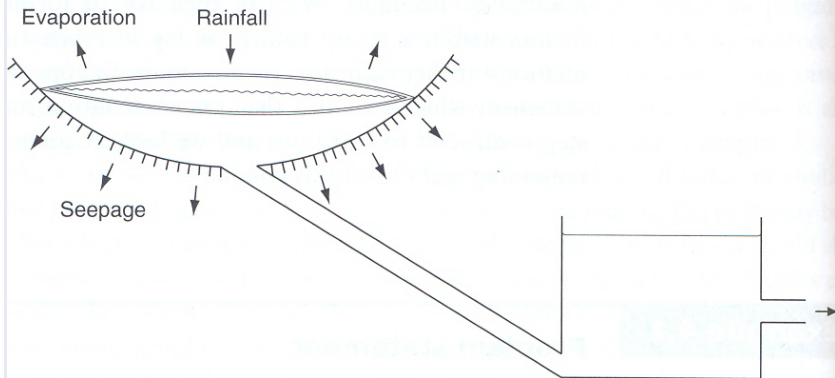
- deterministyczne
- losowe

### Zmienne

- wejściowe
- wyjściowe

# Przykład: zbiornik i cysterna

## Sformułowanie problemu



**Cel:** przewidywać głębokość wody w cysternie w dowolnej chwili czasu.

# Przykład: zbiornik i cysterna

## Czynniki dotyczące zbiornika

- kształt
- pojemność
- głębokość wody
- szybkość opadu
- szybkość dopływu do rzeki
- parowanie
- przesączanie się

# Przykład: zbiornik i cysterna

## Czynniki dotyczące rury łączącej

- średnica
- długość
- różnica wysokości między końcami
- natężenie przepływu

# Przykład: zbiornik i cysterna

## Czynniki dotyczące cysterny

- pojemność
- pole przekroju
- głębokość wody
- średnica rury wylotowej
- wysokość rury wylotowej względem dna
- natężenie przepływu przez rurę wylotową

## Pytanie

Jak sklasyfikować czynniki jako zmienne wejściowe, wyjściowe i parametry?