Umiejętność modelowania

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wykład 4

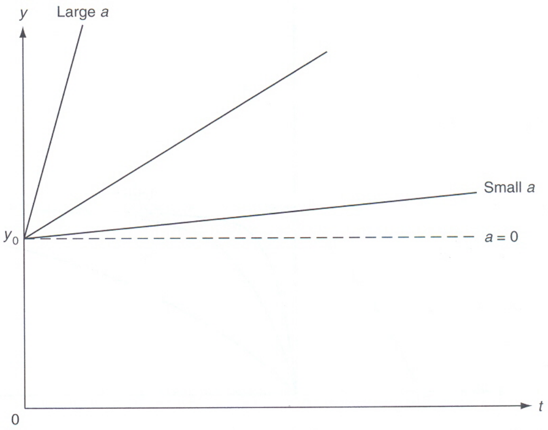
Plan

1. Część 1
   - Zachowania zmiennych
   - Przykłady
2. Część 2
   - Pomijanie czynników nieistotnych
   - Przykłady

Istotne pytania o przebiegu $y(t)$

1. Co dzieje się dla dużych t?
2. Co dzieje się dla małych t?
3. Czy istnieją wartości t, w których y osiąga maksimum lub minimum?
4. Czy istnieją wartości t, dla których $y = 0$?
5. Czy jesteśmy zainteresowani wszystkimi wartościami t, czy tylko pewnym zakresem, np. $t > 0$ lub $t_1 < t < t_2$?

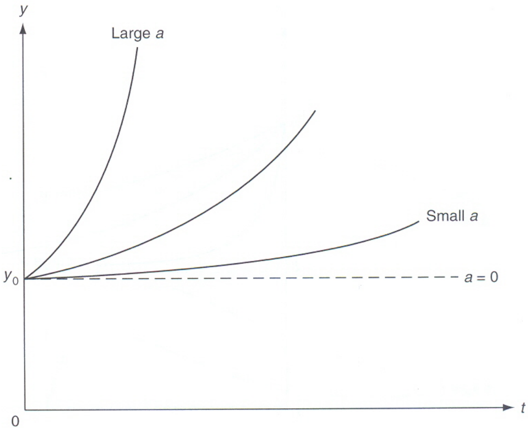
Typowe przebiegi



Liniowy

$$y(t) = y_0 + at$$

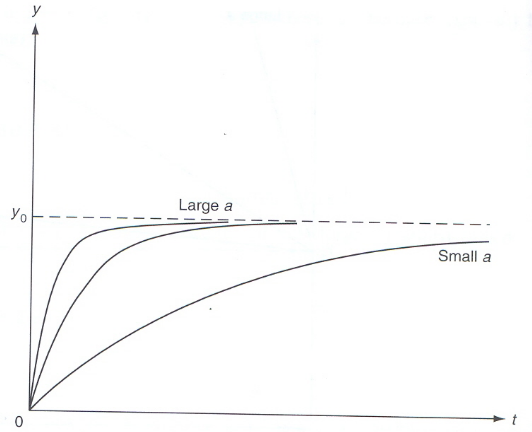
Typowe przebiegi



Nieograniczony wzrost

$$y(t) = y_0 \exp(at)$$

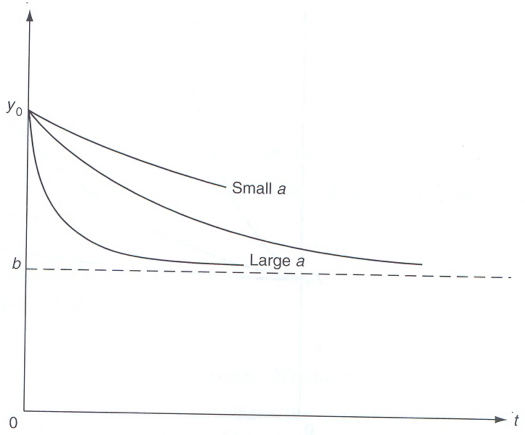
Typowe przebiegi



Wzrost do wartości granicznej

$$y(t) = y_0\,(1 - \exp(-at))$$

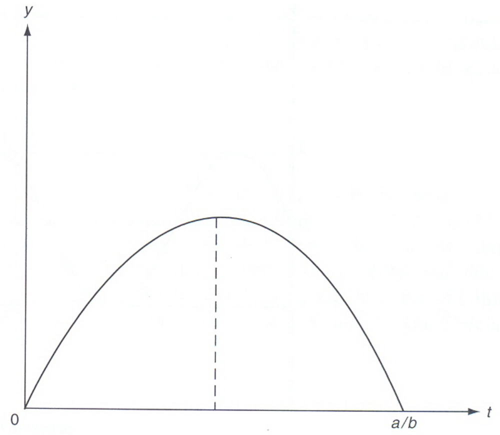
Typowe przebiegi



Spadek do wartości granicznej

$$y(t) = (y_0 - b)\exp(-at) + b$$

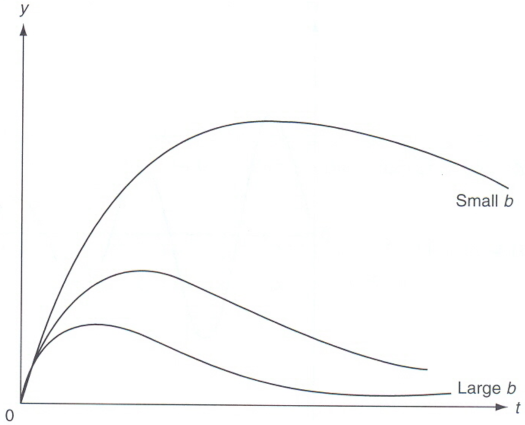
Typowe przebiegi



Proste maksimum

$$y(t) = at - bt^2$$

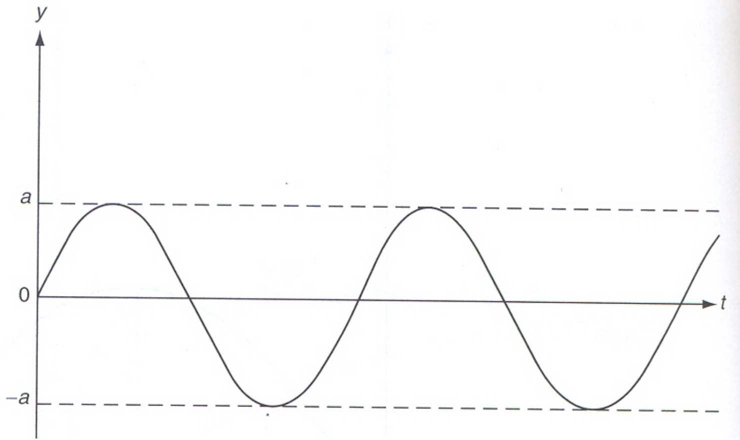
Typowe przebiegi



Maksimum z następującym zanikiem

$$y(t) = at\exp(-bt)$$

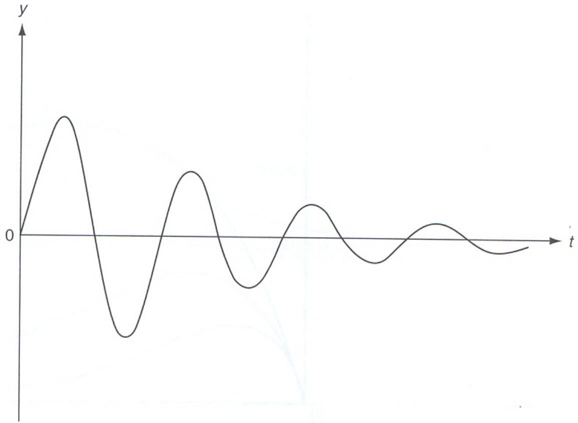
Typowe przebiegi



Oscylacje

$$y(t) = a\sin(\omega t)$$

Typowe przebiegi



Zanikające oscylacje

$$y(t) = a\exp(-bt)\sin(\omega t)$$

Plan

1. Część 1
   - Zachowania zmiennych
   - Przykłady

2. Część 2
   - Pomijanie czynników nieistotnych
   - Przykłady

Typowe przebiegi

Przykład

Jezeli teraz liczebość kultury bakterii to 100 organizmów, a populacja podwaja się co 5 minut, jakiego wyrażenia użyć do zamodelowania ewolucji liczebności tej populacji?

Rozwiązanie

Jeżeli założymy $y(t) = y_0 \exp(at)$, to dla $t = 0$ mamy

$$y(0) = y_0 \exp(a \cdot 0) = y_0 = 100$$

Dla $t = 5$ mamy $y(5) = 200 = 100 \exp(a \cdot 5)$, skąd

$$2 = \exp(5a) \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{5} \ln 2 \approx 0.139$$

Możliwym modelem jest więc $y(t) = 100 \exp(0.139t)$.

Typowe przebiegi

Przykład

Jezeli teraz liczebość kultury bakterii to 100 organizmów, a populacja podwaja się co 5 minut, jakiego wyrażenia użyć do zamodelowania ewolucji liczebności tej populacji?

Rozwiązanie

Jeżeli założymy $y(t) = y_0 \exp(at)$, to dla $t = 0$ mamy

$$y(0) = y_0 \exp(a \cdot 0) = y_0 = 100$$

Dla $t = 5$ mamy $y(5) = 200 = 100 \exp(a \cdot 5)$, skąd

$$2 = \exp(5a) \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{5} \ln 2 \approx 0.139$$

Możliwym modelem jest więc $y(t) = 100 \exp(0.139t)$.

Typowe przebiegi

Przykład

Należy zamodelować średnią dzienną liczbę godzin słonecznych w pewnym miejscu. Jeżeli startujesz z zimowego minimum, gdy dziennie słońce świeci średnio $y_{\min}$ godzin, a t jest liczbą dni od tej chwili, to odpowiednim modelem może być

$$y(t) = y_{\min} + b \sin^2(\omega t)$$

Jakie wartości wziąć za b i ω?

Rozwiązanie

Okresem $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega t)]$ jest $\pi/\omega = 365$ dni, skąd

$$\omega = \frac{\pi}{365} \approx 0.0086$$

Typowe przebiegi

Przykład

Należy zamodelować średnią dzienną liczbę godzin słonecznych w pewnym miejscu. Jeżeli startujesz z zimowego minimum, gdy dziennie słońce świeci średnio y_{min} godzin, a t jest liczbą dni od tej chwili, to odpowiednim modelem może być

$$y(t) = y_{\text{min}} + b\sin^2(\omega t)$$

Jakie wartości wziąć za b i ω?

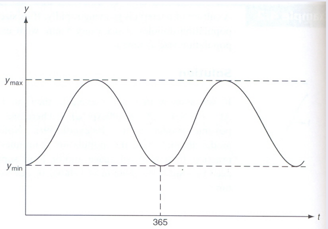
Rozwiązanie

Okresem $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega t)]$ jest $\pi/\omega = 365$ dni, skąd

$$\omega = \frac{\pi}{365} \approx 0.0086$$

Typowe przebiegi

Rozwiązanie c.d.



Wartość y_{max} w letnim szczycie odpowiada $\omega t = \pi/2$, tzn.

$$y = y_{max} = y_{min} + b$$

skąd $b = y_{max} - y_{min}$. Szukanym modelem jest więc

$$y(t) = y_{min} + (y_{max} - y_{min}) \sin^2(0.0086t)$$

Plan

1. Część 1
   - Zachowania zmiennych
   - Przykłady
2. Część 2
   - Pomijanie czynników nieistotnych
   - Przykłady

Względne wielkości czynników

Notacja $x \sim \mathcal{O}(10)$ oznacza „x jest rzędu 10” lub „x jest wyrażone raczej w dziesiątkach niż w setkach”. Mamy

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \sim \mathcal{O}(10^{-1})$$
$$x^2 \sim \mathcal{O}(10^2)$$

czyli wyrażenie

$$y = \frac{1}{x} + x^2$$

jest sumą członów o rzędach wielkości $\mathcal{O}(10^{-1})$ oraz $\mathcal{O}(10^2)$.
Zastępując więc oryginalne wyrażenie przez $y = x^2$ błąd względny powinien być rzędu 10^{-3}.
Przykładowo, dla $x = 8$ zachodzi $1/x + x^2 = 64.125$ oraz $x^2 = 64$, czyli błąd względny wynosi $0.125/64.125 \approx 0.002$.

Względne wielkości czynników

Notacja $x \sim \mathcal{O}(10)$ oznacza „x jest rzędu 10” lub „x jest wyrażone raczej w dziesiątkach niż w setkach”. Mamy

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \sim \mathcal{O}(10^{-1})$$
$$x^2 \sim \mathcal{O}(10^2)$$

czyli wyrażenie

$$y = \frac{1}{x} + x^2$$

jest sumą członów o rzędach wielkości $\mathcal{O}(10^{-1})$ oraz $\mathcal{O}(10^2)$.
Zastępując więc oryginalne wyrażenie przez $y = x^2$ błąd względny powinien być rzędu 10^{-3}.
Przykładowo, dla $x = 8$ zachodzi $1/x + x^2 = 64.125$ oraz $x^2 = 64$, czyli błąd względny wynosi $0.125/64.125 \approx 0.002$.

Względne wielkości czynników

Wyrażenie

$$y = \sqrt{\frac{1}{x} + x^2} \exp\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$$

można więc zastąpić prostszym

$$y = x \exp(x^2)$$

Inna wygodna konwencja: Jeżeli

$$z = 1 + xy^2 + x^2$$

to można powiedzieć, że

$$z = 1 + xy^2 \qquad (x \text{ małe})$$
$$z = 1 + x^2 \qquad (y \text{ małe})$$

(przybliżenia pierwszego rzędu)

Względne wielkości czynników

Wyrażenie

$$y = \sqrt{\frac{1}{x} + x^2} \exp\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$$

można więc zastąpić prostszym

$$y = x \exp(x^2)$$

Inna wygodna konwencja: Jeżeli

$$z = 1 + xy^2 + x^2$$

to można powiedzieć, że

$$\begin{aligned} z &= 1 + xy^2 && (x \text{ małe}) \\ z &= 1 + x^2 && (y \text{ małe}) \end{aligned}$$

(przybliżenia pierwszego rzędu)

Względne wielkości czynników

Podobnie,

$$z = 1 \qquad (x \text{ i } y \text{ małe})$$

jest przybliżeniem pierwszego rzędu, a

$$z = 1 + x^2 \qquad (x \text{ i } y \text{ małe})$$

przybliżeniem drugiego rzędu.

Przydatnym może być szereg Maclaurina, np.

$$y = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

skąd

$$y = 1 - x \quad (x \text{ małe})$$

Względne wielkości czynników

Podobnie,

$$z = 1 \qquad (x \text{ i } y \text{ małe})$$

jest przybliżeniem pierwszego rzędu, a

$$z = 1 + x^2 \qquad (x \text{ i } y \text{ małe})$$

przybliżeniem drugiego rzędu.

Przydatnym może być szereg Maclaurina, np.

$$y = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

skąd

$$y = 1 - x \quad (x \text{ małe})$$

Względne wielkości czynników

Podobnie, z zależności

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

wynika

$$y = 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \text{ małe})$$

Plan

1. Część 1
   - Zachowania zmiennych
   - Przykłady
2. Część 2
   - Pomijanie czynników nieistotnych
   - Przykłady

Względne wielkości czynników

Przykład

Wielkość

$$y = \frac{\exp(-x)}{1 - x}$$

można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} y &= (1 - x)^{-1} \exp(-x) \\ &= (1 + x + x^2 + \dots)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots\right) \\ &\approx 1 + \frac{x^2}{2} \quad (x \text{ małe}) \end{aligned}$$

Względne wielkości czynników

Przykład

Wielkość

$$y = 1 + a\sin(\omega x) + a^2\omega^2\cos(\omega x)$$

można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} y = 1 &+ a(\omega x - \frac{1}{6}\omega^3 x^3 + \dots) \\ &+ a^2\omega^2(1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \dots) \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} y &= 1 + a^2\omega^2 + a\omega x && (x \text{ małe}) \\ y &= 1 + a\sin(\omega x) && (a \text{ małe}) \\ y &= 1 + a\omega x && (\omega \text{ małe}) \end{aligned}$$

Względne wielkości czynników

Przykład

Wielkość

$$y = 1 + a\sin(\omega x) + a^2\omega^2\cos(\omega x)$$

można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} y = 1 &+ a(\omega x - \frac{1}{6}\omega^3 x^3 + \dots) \\ &+ a^2\omega^2(1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \dots) \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} y &= 1 + a^2\omega^2 + a\omega x && (x \text{ małe}) \\ y &= 1 + a\sin(\omega x) && (a \text{ małe}) \\ y &= 1 + a\omega x && (\omega \text{ małe}) \end{aligned}$$