Analiza wymiarowa i równania różnicowe

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wykład 5

Plan

1. Część 1: Analiza wymiarowa
   - Jednostki
   - Analiza wymiarowa
2. Część 2: Równania różnicowe
   - Wstęp
   - Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Układ SI (Système International d'Unités)

Siedem jednostek podstawowych:

wielkość	jednostka	symbol
długość	metr	m
masa	kilogram	kg
czas	sekunda	s
prąd elektryczny	amper	A
temperatura	kelwin	K
natężenie światła	kandela	cd
ilość substancji	mol	mol

Jednostki pochodne

wielkość	jednostka	symbol
siła	niuton	N ($\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$)
energia	dżul	J ($\mathrm{kg\ m^{2}\ s^{-2}}$)
moc	wat	W ($\mathrm{J\ s^{-1}}$ lub $\mathrm{kg\ m^{2}\ s^{-3}}$)
częstotliwość	herc	Hz ($\mathrm{s^{-1}}$)
ciśnienie	paskal	Pa ($\mathrm{N\ m^{-2}}$ lub $\mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-2}}$)

Mnożniki

mnożnik	prefiks	symbol
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{-2}	centy	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n

Plan

1. Część 1: Analiza wymiarowa
   - Jednostki
   - Analiza wymiarowa
2. Część 2: Równania różnicowe
   - Wstęp
   - Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Wymiary

W mechanice, wszystkie wielkości można wyrazić w kategoriach podstawowych wielkości: masy (M), długości (L) oraz czasu (T). Każda inna wielkość fizyczna będzie ich kombinacją, a konkretną kombinację nazywa się *wymiarem* danej wielkości.

$$\begin{aligned} [\text{pole}] &= \mathrm{L}^2 \\ [\text{prędkość}] &= \mathrm{LT}^{-1} \\ [\text{gęstość}] &= \mathrm{ML}^{-3} \end{aligned}$$

Zauważyć, że wymiary są niezależne od jednostek.

Wymiary

Każde poprawne równanie musi być wymiarowo spójne, tzn. musi zachodzić

$$[\text{lewa strona}] = [\text{prawa strona}]$$

Przykładowo, modelowanie siły tarcia spowodowanej oporem powietrza prowadzi do zależności

$$F = kv^2 \Longrightarrow [F] = [kv^2]$$

skąd

$$\mathrm{MLT}^{-2} = [k][\mathrm{LT}^{-1}]^2 = [k]\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}$$

czyli

$$[k] = \mathrm{ML}^{-1}$$

tzn. k musi być mierzone w $\mathrm{kg\,m}^{-1}$.

Analiza wymiarowa

Pytanie

Jaki wymiar ma a w wyrażeniach $\exp(at)$ oraz $\sin(at)$?

Przykład

Przypuśćmy, że budujemy model który będzie przewidywał okres wahadła t. Lista czynników może obejmować długość l, masę m, przyspieszenie ziemskie g oraz amplitudę θ. Załóżmy, że

$$t = kl^a m^b g^c \theta^d$$

gdzie: a, b, c, d oraz k — liczby rzeczywiste.
Dla wymiarów musi zachodzić

$$[t] = [kl^a m^b g^c \theta^d]$$

Analiza wymiarowa

Pytanie

Jaki wymiar ma a w wyrażeniach $\exp(at)$ oraz $\sin(at)$?

Przykład

Przypuśćmy, że budujemy model który będzie przewidywał okres wahadła t. Lista czynników może obejmować długość l, masę m, przyspieszenie ziemskie g oraz amplitudę θ. Załóżmy, że

$$t = kl^a m^b g^c \theta^d$$

gdzie: a, b, c, d oraz k — liczby rzeczywiste.
Dla wymiarów musi zachodzić

$$[t] = [kl^a m^b g^c \theta^d]$$

Analiza wymiarowa

Przykład c.d.

Oznacza to, że

$$\mathrm{T} = \mathrm{L}^a \mathrm{M}^b (\mathrm{L}\mathrm{T}^{-2})^c$$

(k i θ są bezwymiarowe). Przyrównanie potęg daje

$$a + c = 0, \quad b = 0, \quad -2c = 1$$

skąd

$$t = k l^{1/2} g^{-1/2} \theta^d$$

Powyżej d może przyjąć dowolną wartość, ale możemy to wyrazić ogólniej jako

$$t = f(\theta) l^{1/2} g^{-1/2}$$

Funkcję $f(\theta)$ trzeba będzie znaleźć w inny sposób.

Przykład c.d.

Uwzględnijmy dodatkowo siłę oporu powietrza R:

$$t = kl^a m^b g^c \theta^d R^e$$

Prowadzi to do

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^1 &= \mathrm{L}^a\mathrm{M}^b(\mathrm{LT}^{-2})^c(\mathrm{MLT}^{-2})^e \\ &= \mathrm{M}^{b+e}\mathrm{L}^{a+c+e}\mathrm{T}^{-2c-2e} \end{aligned}$$

i, w konsekwencji, do warunków

$$\begin{aligned} b + e &= 0 \\ a + c + e &= 0 \\ -2c - 2e &= 1 \\ d & \quad \text{dowolne} \end{aligned}$$

Przykład c.d.

Jednym z rozwiązań jest

$$e = -b$$
$$c = -b - \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{1}{2}$$

co daje

$$t = kl^{1/2} m^b g^{b-1/2} R^{-b} \theta^d = k \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \left(\frac{mg}{R}\right)^b \theta^d$$
$$= \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} f_1\left(\theta, \frac{mg}{R}\right)$$

dla pewnej funkcji f_1.

Przykład c.d.

Alternatywnym rozwiązaniem jest

$$e = -c - \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{1}{2}$$
$$b = c + \frac{1}{2}$$

co daje

$$t = kl^{1/2} m^{c+1/2} g^c R^{-c-1/2} \theta^d = \left(\frac{ml}{R}\right)^{1/2} f_2\left(\theta, \frac{mg}{R}\right)$$

dla pewnej funkcji f_2.

Plan

1. Część 1: Analiza wymiarowa
   - Jednostki
   - Analiza wymiarowa
2. Część 2: Równania różnicowe
   - Wstęp
   - Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Warianty dynamiki populacji miasta

1. Populacja wzrasta o 1000 osób rocznie:
$$P_{n+1} = P_n + 1000$$
2. Populacja rośnie o 1% rocznie:
$$P_{n+1} = (1.01)P_n$$
3. Populacja wzrastałaby o 2% gdyby nie emigracja 100 osób rocznie:
$$P_{n+1} = (1.02)P_n - 100$$

Podstawowe rodzaje równań

Jednorodne: równanie będzie spełnione po podstawieniu zer pod wszystkie X, np.

$$X_{n+2} - 3X_{n+1} + X_n = 0$$

jest jednorodne, ale nie jest równanie

$$X_{n+1} - 2X_n = 3n + 1$$

O stałych współczynnikach: jest nim

$$X_{n+2} - 3X_{n+1} + X_n = 0$$

ale nie jest

$$X_{n+2} - 3nX_{n+1} + X_n = 0$$

Podstawowe rodzaje równań

Pierwszego rzędu, drugiego rzędu, . . . : Rząd jest różnicą maksymalnego i minimalnego indeksu, np.

$$X_{n+3} - 3X_{n+2} + X_n = 0$$

jest trzeciego rzędu. Rząd determinuje liczbę niezbędnych wartości początkowych.

Liniowe: jest nim np.

$$X_{n+1} = 2X_n + 3X_{n-1} + n^2 + 7$$

Przykład

Przykład

Niech P_n — wielkość produkcji w roku n. Załóżmy, że ta produkcja podwaja się każdego roku, tzn.

$$P_{n+1} = 2P_n$$

Jeżeli P_0 — produkcja w roku 0, to

$$\begin{aligned} P_1 &= 2P_0 \\ P_2 &= 2P_1 = 2(2P_0) = 2^2 P_0 \\ P_3 &= 2P_2 = 2(2^2 P_0) = 2^3 P_0 \qquad \text{itd.} \end{aligned}$$

Widzimy więc, że rozwiązaniem ogólnym jest

$$P_n = 2^n P_0$$

Przykład

Przykład c.d.

Analogicznie, gdy produkcja rośnie o 25% rocznie, otrzymujemy równanie $P_{n+1} = (1.25)P_n$ i rozwiązanie $P_n = (1.25)^n P_0$.

W ten sam sposób też, gdy blokujemy na koncie kwotę P_0 z roczną stopą procentową $r\%$, po n latach otrzymamy sumę spełniającą równanie

$$P_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{100}\right) P_n$$

którego rozwiązaniem jest

$$P_n = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n P_0$$

Przykład

Przykład c.d.

Analogicznie, gdy produkcja rośnie o 25% rocznie, otrzymujemy równanie $P_{n+1} = (1.25)P_n$ i rozwiązanie $P_n = (1.25)^n P_0$.

W ten sam sposób też, gdy blokujemy na koncie kwotę P_0 z roczną stopą procentową $r\%$, po n latach otrzymamy sumę spełniającą równanie

$$P_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{100}\right) P_n$$

którego rozwiązaniem jest

$$P_n = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n P_0$$

Przypadek ogólny

Rozważmy

$$X_{n+1} = aX_n$$

Rozwiązaniem jest (sprawdzić!)

$$X_n = a^n X_0$$

Jak zachowuje się rozwiązanie dla poniższych przypadków?

1. $a > 1$
2. $0 < a < 1$
3. $-1 < a < 0$
4. $a < -1$

Plan

1. Część 1: Analiza wymiarowa
   - Jednostki
   - Analiza wymiarowa
2. Część 2: Równania różnicowe
   - Wstęp
   - Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Rozważmy

$$X_{n+1} = aX_n + b$$

Startując od X_0 otrzymujemy

$$X_1 = aX_0 + b$$
$$X_2 = aX_1 + b = a(aX_0 + b) + b = a^2X_0 + (a+1)b$$
$$X_3 = aX_2 + b = a(a^2X_0 + (a+1)b) + b = a^3X_0 + (a^2 + a + 1)b$$

Kontynuując w ten sam sposób mamy

$$\begin{aligned} X_n &= a^nX_0 + (a^{n-1} + \dots a^2 + a + 1)b \\ &= a^nX_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1}b \end{aligned}$$

o ile $a \neq 1$. (A co dla $a = 1$?) Przeanalizować również przypadki $|a| < 1$ oraz $|a| > 1$.

Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Przykład

W jeziorze jest aktualnie 10 000 ryb. Gdyby ich nie odławiano, populacja wzrastałaby o 15% rocznie. Proponuje się, żeby jednak odławiać 2000 ryb na rok. Oznaczając F_n — liczba ryb po n latach od teraz, otrzymujemy model

$$F_{n+1} = (1.15)F_n - 2000, \quad F_0 = 10\,000$$

Daje to w kolejnych latach

$$9500, \; 8925, \; 8264, \; 7503, \; \ldots$$

Po ilu latach populacja ryb zniknie?

Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Zadanie

Jezioro zawiera 100 000 m^3 wody zanieczyszczonej w 5%. Każdego dnia do jeziora wpływa 1000 m^3 czystej wody, a wypływa 1000 m^3 wody zanieczyszczonej. Jak długo potrwa obniżenie poziomu zanieczyszczenia do 1% objętości?

Rozwiązanie

Zauważmy, że objętość wody z jeziorze pozostaje stała. Przyjmujemy krok czasowy jako jeden dzień i oznaczamy P_n — objętość zanieczyszczenia w jeziorze w n-tym dniu. Mamy

$$P_0 = 0.05 \times 100\,000 = 5000\ \mathrm{m}^3$$

Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Zadanie

Jezioro zawiera 100 000 m^3 wody zanieczyszczonej w 5%. Każdego dnia do jeziora wpływa 1000 m^3 czystej wody, a wypływa 1000 m^3 wody zanieczyszczonej. Jak długo potrwa obniżenie poziomu zanieczyszczenia do 1% objętości?

Rozwiązanie

Zauważmy, że objętość wody z jeziorze pozostaje stała. Przyjmujemy krok czasowy jako jeden dzień i oznaczamy P_n — objętość zanieczyszczenia w jeziorze w n-tym dniu. Mamy

$$P_0 = 0.05 \times 100\,000 = 5000\ \mathrm{m}^3$$

Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Rozwiązanie c.d.

W n-tym dniu każdy m^3 wody zawiera $P_n/100\,000\ \mathrm{m}^3$ zanieczyszczenia, a to oznacza, że z jeziora tego dnia wypłynie $1000 \times P_n/100\,000\ \mathrm{m}^3$ zanieczyszczenia. Stąd

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n - 1000 \times P_n/100\,000 \\ &= (1 - 0.01)P_n \\ &= (0.99)P_n \end{aligned}$$

czyli $P_n = (0.99)^n P_0 = (0.99)^n 5000$.

Zatem P_n osiągnie wartość 1000 gdy $1000 = (0.99)^n 5000$, tzn. $n = \ln(0.2)/\ln(0.99) \approx 161$ dni.

Liniowe równania różnicowe pierwszego rzędu

Rozwiązanie c.d.

Załóżmy teraz, że zanieczyszczenie nadal wpływa do jeziora z szybkością 5 m^3 na dzień, podczas gdy równocześnie wpływa 995 m^3 czystej wody i wypływa 1000 m^3 wody zanieczyszczonej. Modelem jest wówczas

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n - 1000 \times P_n/100\,000 + 5 \\ &= (0.99)P_n + 5 \end{aligned}$$

Powyższe równanie ma rozwiązanie

$$P_n = (0.99)^n 5000 + 5\frac{1 - 0.99^n}{1 - 0.99} = 500[9(0.99)^n + 1]$$

Warunek $1000 = 500[9(0.99)^n + 1]$ daje $n = -\ln(9)/\ln(0.99) \approx 219$ dni.