Równania różnicowe (c.d.)

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Universytet Zielonogórski

Wykład 6

Plan

Dążenie do stanu ustalonego

Dla pewnych modeli dyskretnych, w miarę wzrostu n, wartości X_n dążą do pewnej wartości granicznej L, chociaż nigdy jej dokładnie nie osiągają. W efekcie, X_{n+1} staje się nieodróżnialne od X_n, tzn. $X_{n+1} \approx X_n \approx L$.

Sposób określania L: Dla równania

$$X_{n+1} = \frac{5X_n - 1}{X_n + 3}$$

otrzymujemy równanie spełniane przez L:

$$L = \frac{5L - 1}{L + 3}$$

skąd

$$L = 1$$

Dążenie do stanu ustalonego

Dla pewnych modeli dyskretnych, w miarę wzrostu n, wartości X_n dążą do pewnej wartości granicznej L, chociaż nigdy jej dokładnie nie osiągają. W efekcie, X_{n+1} staje się nieodróżnialne od X_n, tzn. $X_{n+1} \approx X_n \approx L$.

Sposób określania L: Dla równania

$$X_{n+1} = \frac{5X_n - 1}{X_n + 3}$$

otrzymujemy równanie spełniane przez L:

$$L = \frac{5L - 1}{L + 3}$$

skąd

$$L = 1$$

Dążenie do stanu ustalonego

Dla równania liniowego

$$X_{n+1} = aX_n + b$$

otrzymuje się

$$L = aL + b \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{b}{1-a}$$

Pytanie: Co gdy $a = 1$? A co gdy $X_0 = L$?

Przykład

Dla przykładu gospodarstwa rybackiego z poprzedniego wykładu otrzymujemy $L = (1.15)L - 2000$, skąd $L = 13333\frac{1}{3}$ jest stanem ustalonym. Zauważyć, że ten stan równowagi nie jest stabilny (rownowaga1.xls).

Dążenie do stanu ustalonego

Dla równania liniowego

$$X_{n+1} = aX_n + b$$

otrzymuje się

$$L = aL + b \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{b}{1-a}$$

Pytanie: Co gdy $a = 1$? A co gdy $X_0 = L$?

Przykład

Dla przykładu gospodarstwa rybackiego z poprzedniego wykładu otrzymujemy $L = (1.15)L - 2000$, skąd $L = 13333\frac{1}{3}$ jest stanem ustalonym. Zauważyć, że ten stan równowagi nie jest stabilny (rownowaga1.xls).

Dążenie do stanu ustalonego

Przykład

Populacja trawożerców w pewnym obszarze zmniejsza się o 5% rocznie. Ponieważ dzięki temu pozostaje więcej roślinności, do rozważanego obszaru przybywa 300 nowych zwierząt. Odpowiada to modelowi

$$P_{n+1} = (0.95)P_n + 300$$

W stanie równowagi zachodzi więc

$$L = (0.95)L + 300$$

skąd $L = 6000$. Jest to stan równowagi stabilnej (rownowaga2.xls).
Pytanie: Skąd biorą się odmienne zachowania w obu przykładach? (Wskazówka: Zbadaj rolę parametru *a*.)

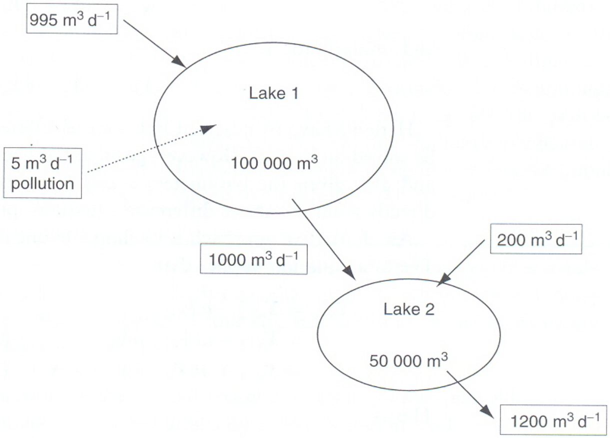
Plan

Więcej niż jedna zmienna

Przykład

Rozważmy jezioro omawiane na poprzednim wykładzie. Załóżmy, że jego woda wpływa do innego jeziora, zawierajacego 50 000 m^3 wody. Dzienny odpływ z drugiego jeziora wynosi 1200 m^3, ale równocześnie 200 m^3 czystej wody wpada do niego ze strumienia. Oznaczmy przez Q_n poziom zanieczyszczenia w drugim jeziorze po n dniach. Zapisać równanie różnicowe spełniane przez Q_n.

Więcej niż jedna zmienna



Więcej niż jedna zmienna

Przykład c.d.

Drugie jezioro otrzymuje dziennie 1000 m^3 wody z pierwszego jeziora, w którym jest $0.01P_n$ zanieczyszczenia. Rozumując jak dla pierwszego jeziora, ilość zanieczyszczenia wypływającego z drugiego jeziora to $1200Q_n/50\,000 = 0.024Q_n$, skąd

$$Q_{n+1} = Q_n - 0.024Q_n + 0.01P_n = 0.976Q_n + 0.01P_n$$

W symulacjach równania

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= 0.99P_n + 5 \\ Q_{n+1} &= 0.976Q_n + 0.01P_n \end{aligned}$$

należy rozwiązywać równocześnie, startując ze znanych warunków początkowych P_0 i Q_0.

Więcej niż jedna zmienna

Inny przykład

Podczas bitwy każda jednostka armii X może zniszczyć b jednostek armii Y w ciągu jednostki czasu. Podobnie, każda jednostka armii Y może zniszczyć a jednostek armii X. Niech X_n — liczba jednostek armii X, które przetrwały po n krokach czasu, Y_n — podobna liczba jednostek armii Y. Otrzymujemy równania

$$
\begin{aligned}
X_{n+1} &= X_n - aY_n \\
Y_{n+1} &= Y_n - bX_n
\end{aligned}
$$

których można użyć do wyznaczenia ciągów $\{X_n\}$ oraz $\{Y_n\}$ w oparciu o znajomość X_0 i Y_0.

Więcej niż jedna zmienna

Inny przykład

Zauważmy, że alternatywnie można wyeliminować jedną zmienną:

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= X_{n+1} - aY_{n+1} \\ &= X_{n+1} - a(Y_n - bX_n) \\ &= X_{n+1} + abX_n + \underbrace{(X_{n+1} - X_n)}_{-aY_n} \end{aligned}$$

Oznacza to równanie *drugiego* rzędu

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + (1 - ab)X_n = 0$$

którego można użyć w symulacjach znając X_0 i X_1.

Plan

1. Część 1: Dalsze wiadomości o równaniach liniowych
   - Stany równowagi
   - Przypadek wielu zmiennych
2. Część 2: Modele nieliniowe i chaos
   - Świat nieliniowości

Prosty model i skomplikowane zachowania

Rozważmy równanie nieliniowe

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$$

gdzie: a — stała, $0 < X_0 < 1$. Warianty:

1. $0 < a < 1$: $X_n \to 0$
2. $1 < a < 3$: $X_n \to 1 - 1/a$
3. $3 < a < 3.449$: po stanie przejściowym naprzemiennie pojawiają się tylko dwie wartości (okres 2)
4. $3.449 < a < 3.544$: po stanie przejściowym naprzemiennie pojawiają się cztery wartości (okres 4)
5. $3.544 < a < 3.564$: po stanie przejściowym naprzemiennie pojawia się osiem wartości (okres 8)
6. Dalsze zwiększanie a powoduje kolejne podwojenia okresu (sprawdzić samodzielnie!)
7. $a = 3.57$: nieskończona liczba różnych wartości i brak okresu (chaos); zaobserwować „efekt motyla".