Równania różniczkowe

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wykład 7

Plan

Sformułowanie

Chcemy zbudować model w celu przewidywania przyrostu populacji. Interesującą nas zmienną jest wielkość populacji $P(t)$ w dowolnej chwili t. Dla krótkiego odcinka czasu Δt zachodzi

$$\boxed{\begin{aligned}&\{\text{przyrost populacji w czasie } \Delta t\}\\ &\qquad = \{\text{urodziny w czasie } \Delta t\} - \{\text{zgony w czasie } \Delta t\}\\ &\qquad\quad + \{\text{imigracje w czasie } \Delta t\} - \{\text{emigracje w czasie } \Delta t\}\end{aligned}}$$

Dla prostoty pomińmy jednak imigrację i migrację. Oczywiście, liczby urodzin i zgonów zależeć będą od

1. długości przedziału Δt
2. rozmiaru populacji na początku przedziału czasu

Sformułowanie

Najprostsze założenia:

$$\text{liczba urodzin w przedziale czasu} = B\,P(t)\,\Delta t$$
$$\text{liczba zgonów w przedziale czasu} = D\,P(t)\,\Delta t$$

gdzie: B, D — stałe. Stąd model

$$P(t+\Delta t) - P(t) = (B-D)\,P(t)\,\Delta t$$

Opcja 1. Możemy ustalić jednostkę czasu, np. $\Delta t = 1$ rok. $P(t)$ zmienia się wtedy w czasie dyskretnym, a oznaczając $P_n = P(n\Delta t)$ mamy równanie różnicowe

$$P_{n+1} = (B - D + 1)P_n$$

Jego rozwiązanie wymaga znajomości P_0.

Sformułowanie

Najprostsze założenia:

$$\text{liczba urodzin w przedziale czasu} = B\,P(t)\,\Delta t$$
$$\text{liczba zgonów w przedziale czasu} = D\,P(t)\,\Delta t$$

gdzie: B, D — stałe. Stąd model

$$P(t+\Delta t) - P(t) = (B-D)\,P(t)\,\Delta t$$

Opcja 1. Możemy ustalić jednostkę czasu, np. $\Delta t = 1$ rok. $P(t)$ zmienia się wtedy w czasie dyskretnym, a oznaczając $P_n = P(n\Delta t)$ mamy równanie różnicowe

$$P_{n+1} = (B-D+1)P_n$$

Jego rozwiązanie wymaga znajomości P_0.

Sformułowanie

Opcja 2. Rozważmy $P(t)$ jako wielkość zmieniającą się w czasie ciągłym. Mamy

$$\frac{1}{P(t)}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=B-D$$

Przejście do granicy $\Delta t \to 0$ prowadzi do

$$\frac{1}{P(t)}\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=B-D$$

To równanie różniczkowe zwyczajne, którego rozwiązaniem jest (sprawdzić!)

$$P(t)=P(0)\exp[(B-D)t]$$

Zauważyć konieczność znajomości $P(0)$, czyli tzw. warunku początkowego.

Pytanie: Jak zachowuje się rozwiązanie jeżeli $B>D$ oraz $B<D$?

Sformułowanie

Opcja 2. Rozważmy $P(t)$ jako wielkość zmieniającą się w czasie ciągłym. Mamy

$$\frac{1}{P(t)}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} = B - D$$

Przejście do granicy $\Delta t \to 0$ prowadzi do

$$\frac{1}{P(t)}\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = B - D$$

To równanie różniczkowe zwyczajne, którego rozwiązaniem jest (sprawdzić!)

$$P(t) = P(0)\exp[(B-D)t]$$

Zauważyć konieczność znajomości $P(0)$, czyli tzw. warunku początkowego.

Pytanie: Jak zachowuje się rozwiązanie jeżeli $B > D$ oraz $B < D$?

Sformułowanie

Opcja 2. Rozważmy $P(t)$ jako wielkość zmieniającą się w czasie ciągłym. Mamy

$$\frac{1}{P(t)}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=B-D$$

Przejście do granicy $\Delta t \to 0$ prowadzi do

$$\frac{1}{P(t)}\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=B-D$$

To równanie różniczkowe zwyczajne, którego rozwiązaniem jest (sprawdzić!)

$$P(t)=P(0)\exp[(B-D)t]$$

Zauważyć konieczność znajomości $P(0)$, czyli tzw. warunku początkowego.

Pytanie: Jak zachowuje się rozwiązanie jeżeli $B > D$ oraz $B < D$?

Udokładnienie i analiza

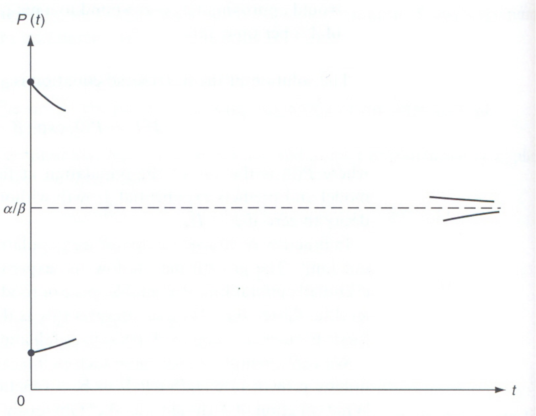
W praktyce, populacja nie może wzrastać wykładniczo bez ograniczenia, tzn. $(1/P)\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ powinno być funkcją P, a nie stałą. Funkcja ta powinna maleć przy rosnącym P. Najprostszy wybór to

$$\frac{1}{P(t)}\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha - \beta P(t)$$

gdzie: α, β — stałe dodatnie.

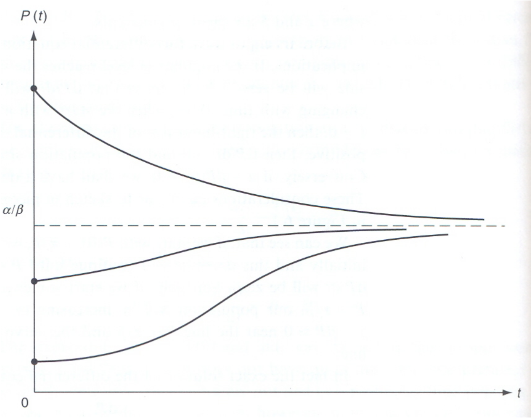
- $P(t) \to \dfrac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha - \beta P(t) \to 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} \to 0 \Rightarrow P(t)$ przestanie się zmieniać
- $\alpha - \beta P(0) > 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}P(0)}{\mathrm{d}t} > 0 \Rightarrow$ na początku populacja wzrasta
- $\alpha - \beta P(0) < 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}P(0)}{\mathrm{d}t} < 0 \Rightarrow$ na początku populacja maleje

Udokładnienie i analiza



Pytanie: Czy krzywa wzrostu populacji przetnie linię $P = \alpha/\beta$?

Krzywe logistyczne



Rozwiązanie: $P(t) = M\left[1 + \left(\frac{M}{P_0} - 1\right)\exp(-\alpha t)\right]^{-1}$

gdzie: $M = \alpha/\beta$, $P_0 = P(0)$

Plan

Sformułowanie

W sądzie toczy się rozprawa ws. mężczyzny podejrzanego o włamanie i kradzież. Obrona tłumaczy, że gdyby mężczyzna wyskoczył z okna na piętrze aby uniknąć złapania na gorącym uczunku, zostałby poważnie ranny.

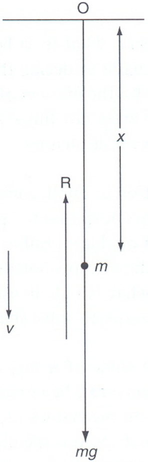
Pytanie: Gdyby ktoś skoczył z wysokości 10 m, z jaką prędkością zetknąłby się z ziemią?

Zacznijmy od wypisania potencjalnych czynników.

Tworzenie modelu

opis	symbol	jednostka
przebyta wysokość	x	m
prędkość	v	$\mathrm{m\ s}^{-1}$
czas	t	s
przyśpieszenie	a	$\mathrm{m\ s}^{-2}$
masa	m	kg
przyśpieszenie ziemskie	g	$9.8065\ \mathrm{m\ s}^{-2}$
ciężar	mg	N
opór powietrza	R	N

Tworzenie modelu



Tworzenie modelu

Mamy

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{x}$$

Zauważmy również, że

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Z II zasady dynamiki Newtona mamy

$$mg - R = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Tworzenie modelu

Z mechaniki wiadomo, że opór powietrza wyraża się zależnością

$$R = kv^n$$

gdzie: $n = 1$ dla małych obiektów (kamień) oraz $n = 2$ dla dużych obiektów (ciało człowieka).

Stąd

$$g - Kv^n = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

gdzie: $K = k/m$.
W mechanice wprowadza się pojęcie tzw. *prędkości granicznej*, czyli końcowej prędkości osiąganej przez ciało spadające swobodnie w medium takim jak powietrze. Dla człowieka wynosi ona ok. 193 $\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Tworzenie modelu

Prędkość graniczna odpowiada ruchowi jednostajnemu, czyli $v = \mathrm{const}$, a wtedy

$$g - Kv^2 = 0$$

Podstawiając $v = 193\ \mathrm{km\ h^{-1}} = 53.61\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ otrzymujemy $K = g/v^2 = 0.00341$ (jakie jednostki?).

W konsekwencji, ostateczny model ruchu ciała spadającego z okna ma postać

$$\boxed{g - 0.00341 v^2 = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}, \quad v(x = 0) = 0}$$

Rozwiązanie

Jego rozwiązaniem jest

$$v(x) = \sqrt{\frac{g}{K}\left[1 - \exp(-2Kx)\right]}$$

x [m]	0	2	4	6	8	$\boxed{10}$
v [m/s]	0	6.24	8.80	10.74	12.36	$\boxed{13.77}$
v [km/h]	0	22.47	31.67	38.66	44.49	$\boxed{49.57}$

Dla porównania: lądujący skoczek spadochronowy czuje to, co zwykły człowiek skaczący z muru o wysokości 3.5 m.

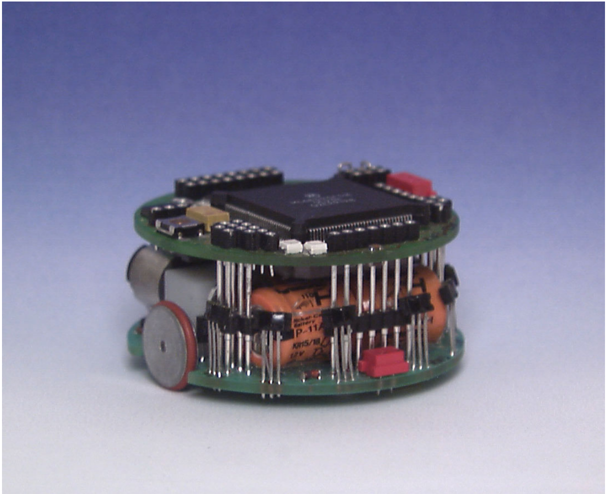
Pytanie: Jak uwzględnić miękkość podłoża? (Wskazówka: zmierzyć głębokość śladu, np. 10 cm, i wyznaczyć średnią siłę działającą na skoczka)

Plan

1. Część 1: Równania pierwszego rzędu, jedna zmienna
   - Model wzrostu populacji
2. Część 2: Równania drugiego rzędu, jedna zmienna
   - Model skoku z okna
3. Część 3: Równania pierwszego rzędu, kilka zmiennych
   - Kinematyka robota mobilnego

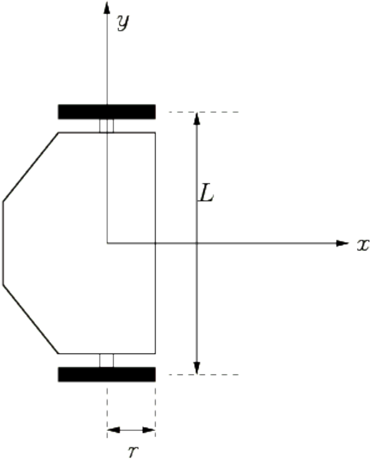
Napęd różnicowy — LegoMindstorms

Napęd różnicowy — Khepera



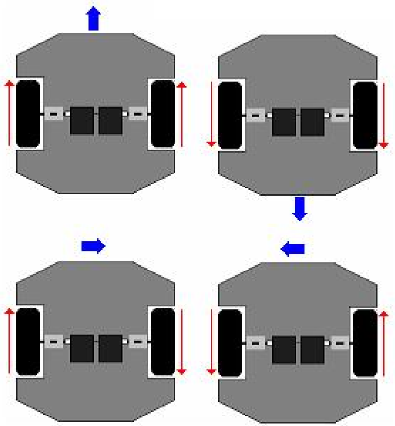
Napęd różnicowy — Pioneer 3–DX

(a)

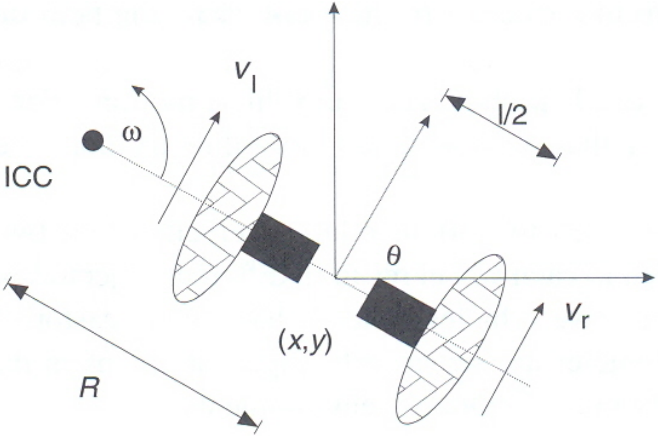


(b)

Napęd różnicowy — zasada działania



Napęd różnicowy — oznaczenia



ICC — Instantaneous Center of Curvature (chwilowy środek krzywizny)

Napęd różnicowy — ruch środka osi

W danej chwili oba koła obracają się z tą samą prędkością kołową, skąd

$$\omega\left(R + \frac{\ell}{2}\right) = v_r$$
$$\omega\left(R - \frac{\ell}{2}\right) = v_l$$

Z tych równań otrzymuje się

$$R = \frac{\ell}{2}\frac{v_l + v_r}{v_r - v_l}, \quad \omega = \frac{v_r - v_l}{\ell}$$

Napęd różnicowy — równania ruchu

Definiując *pozę* robota jako $(x(t), y(t), \theta(t))$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V(t)\cos(\theta(t)), & x(0) &= x_0 \\ \dot{y}(t) &= V(t)\sin(\theta(t)), & y(0) &= y_0 \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t), & \theta(0) &= \theta_0 \end{aligned}$$

Z zależności $V(t) = R(t)\omega(t) = \frac{1}{2}(v_l(t) + v_r(t))$ wynika więc

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{2}(v_l(t) + v_r(t))\cos(\theta(t)), & x(0) &= x_0 \\ \dot{y}(t) &= \frac{1}{2}(v_l(t) + v_r(t))\sin(\theta(t)), & y(0) &= y_0 \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{1}{\ell}(v_r(t) - v_l(t)), & \theta(0) &= \theta_0 \end{aligned}$$

Napęd różnicowy — równania ruchu

Definiując *pozę* robota jako $(x(t), y(t), \theta(t))$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V(t)\cos(\theta(t)), & x(0) &= x_0 \\ \dot{y}(t) &= V(t)\sin(\theta(t)), & y(0) &= y_0 \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t), & \theta(0) &= \theta_0 \end{aligned}$$

Z zależności $V(t) = R(t)\omega(t) = \frac{1}{2}(v_l(t) + v_r(t))$ wynika więc

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{2}(v_l(t) + v_r(t))\cos(\theta(t)), & x(0) &= x_0 \\ \dot{y}(t) &= \frac{1}{2}(v_l(t) + v_r(t))\sin(\theta(t)), & y(0) &= y_0 \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{1}{\ell}(v_r(t) - v_l(t)), & \theta(0) &= \theta_0 \end{aligned}$$