Równania różniczkowe zwyczajne — analityczne metody rozwiązywania

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wykład 8

Plan

Definicja

Równanie różniczkowe zwyczajne — związek między pewną nieznaną funkcją i jej pochodnymi.

1. $$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + t\,y(t) + 3y^2(t) = \exp(t)$$
2. $$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = \cos(t)$$
3. $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = y(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -x(t) \end{cases}$$

Definicja

Równanie różniczkowe zwyczajne — związek między pewną nieznaną funkcją i jej pochodnymi.

1. $$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + t\,y(t) + 3y^2(t) = \exp(t)$$
2. $$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = \cos(t)$$
3. $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = y(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -x(t) \end{cases}$$

Rząd

Rząd równania — rząd najwyższej pochodnej.

1. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ jest drugiego rzędu
2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2$ jest pierwszego rzędu

Rząd

Rząd równania — rząd najwyższej pochodnej.

1. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$ jest drugiego rzędu
2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2$ jest pierwszego rzędu

Rozwiązanie

Rozwiązanie szczególne — każda funkcja $y = y(t)$, która spełnia dane równanie.

1. $y(t) = \cos(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$.
2. Dla dowolnej stałej c, $y(t) = 2 + c\exp(-t)$ jest rozwiązaniem $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 2$.
3. Dla dowolnej stałej a, $y(t) = \cosh(at)/a$ jest rozwiązaniem $y\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 1 = 0$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie szczególne — każda funkcja $y = y(t)$, która spełnia dane równanie.

1. $y(t) = \cos(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$.
2. Dla dowolnej stałej c, $y(t) = 2 + c\exp(-t)$ jest rozwiązaniem $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 2$.
3. Dla dowolnej stałej a, $y(t) = \cosh(at)/a$ jest rozwiązaniem $y\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 1 = 0$.

Dygresja

Sinus hiperboliczny

$$\sinh(x) \equiv \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

Cosinus hiperboliczny

$$\cosh(x) \equiv \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

Własności

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Rozwiązanie c.d.

Rozwiązanie ogólne — rozwiązanie zawierające pewną liczbę stałych w taki sposób, że dowolne rozwiązanie można otrzymać podstawiając pod te stałe odpowiednie wartości liczbowe.

1. $y(t) = \cos(t)$ nie jest rozwiązaniem ogólnym $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$, bo $y(t) = \sin(t)$ jest innym rozwiązaniem.
2. $y(t) = 2 + c\exp(-t)$ jest rozwiązaniem ogólnym $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 2$.
3. $y(t) = \cosh(at)/a$ nie jest rozwiązaniem ogólnym $y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 1 = 0$; rozwiązaniem ogólnym jest $y(t) = \cosh(at + b)/a$

Rozwiązanie c.d.

Rozwiązanie ogólne — rozwiązanie zawierające pewną liczbę stałych w taki sposób, że dowolne rozwiązanie można otrzymać podstawiając pod te stałe odpowiednie wartości liczbowe.

1. $y(t) = \cos(t)$ nie jest rozwiązaniem ogólnym $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$, bo $y(t) = \sin(t)$ jest innym rozwiązaniem.
2. $y(t) = 2 + c\exp(-t)$ jest rozwiązaniem ogólnym $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 2$.
3. $y(t) = \cosh(at)/a$ nie jest rozwiązaniem ogólnym $y\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 1 = 0$; rozwiązaniem ogólnym jest $y(t) = \cosh(at + b)/a$

Rozwiązanie w postaci uwikłanej

- $y^2 + t^2 = 1$ definiuje rozwiązanie szczególne równania $y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -t$ z wyjątkiem punktów $(-1, 0)$ i $(1, 0)$ (dlaczego?)
- $\exp(y) + ty = c$ definiuje rozwiązanie ogólne równania $(\exp(y) + t)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$

Plan

Równania o rozdzielonych zmiennych

Równanie różniczkowe w postaci normalnej — równanie rozwiązane względem najwyższej pochodnej.

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \dots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

Równanie z rozdzielonymi zmiennymi

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(t)b(y)$$

Sposób rozwiązania: Rozdzielamy zmienne, tzn.

$$\frac{\mathrm{d}y}{b(y)} = a(t)\,\mathrm{d}t$$

i całkujemy obie strony aby otrzymać rozwiązanie w postaci uwikłanej.

Równania o rozdzielonych zmiennych — Przykład 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2 \exp(-t)$$

Zakładając $y \neq 0$ mamy

$$y^{-2}\,\mathrm{d}y = \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

Całkując otrzymujemy

$$\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = \int \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

skąd $-y^{-1} = -\exp(-t) + c$ i dalej

$$y = \frac{1}{\exp(-t) - c}$$

Ponieważ $y = 0$ jest rozwiązaniem, które nie jest w ten sposób uwzględnione, nie jest to rozwiązanie ogólne.

Równania o rozdzielonych zmiennych — Przykład 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2 \exp(-t)$$

Zakładając $y \neq 0$ mamy

$$y^{-2}\,\mathrm{d}y = \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

Całkując otrzymujemy

$$\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = \int \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

skąd $-y^{-1} = -\exp(-t) + c$ i dalej

$$y = \frac{1}{\exp(-t) - c}$$

Ponieważ $y = 0$ jest rozwiązaniem, które nie jest w ten sposób uwzględnione, nie jest to rozwiązanie ogólne.

Równania o rozdzielonych zmiennych — Przykład 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2 \exp(-t)$$

Zakładając $y \neq 0$ mamy

$$y^{-2}\,\mathrm{d}y = \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

Całkując otrzymujemy

$$\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = \int \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

skąd $-y^{-1} = -\exp(-t) + c$ i dalej

$$y = \frac{1}{\exp(-t) - c}$$

Ponieważ $y = 0$ jest rozwiązaniem, które nie jest w ten sposób uwzględnione, nie jest to rozwiązanie ogólne.

Równania o rozdzielonych zmiennych — Przykład 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2 \exp(-t)$$

Zakładając $y \neq 0$ mamy

$$y^{-2}\,\mathrm{d}y = \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

Całkując otrzymujemy

$$\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = \int \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

skąd $-y^{-1} = -\exp(-t) + c$ i dalej

$$y = \frac{1}{\exp(-t) - c}$$

Ponieważ $y = 0$ jest rozwiązaniem, które nie jest w ten sposób uwzględnione, nie jest to rozwiązanie ogólne.

Równania o rozdzielonych zmiennych — Przykład 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2 \exp(-t)$$

Zakładając $y \neq 0$ mamy

$$y^{-2}\,\mathrm{d}y = \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

Całkując otrzymujemy

$$\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = \int \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

skąd $-y^{-1} = -\exp(-t) + c$ i dalej

$$y = \frac{1}{\exp(-t) - c}$$

Ponieważ $y = 0$ jest rozwiązaniem, które nie jest w ten sposób uwzględnione, nie jest to rozwiązanie ogólne.

Równania o rozdzielonych zmiennych — Przykład 2

Szukamy rozwiązania równania

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ty^3 \sin(t)$$

spełniającego warunek początkowy $y(0) = 1$. Po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^3} = \int t \sin(t)\, \mathrm{d}t$$

Całka ogólna ma postać

$$\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = t\cos(t) - \sin(t) + c$$

Z warunku poczatkowego wynika $c = 1/2$, skąd

$$y = \frac{1}{\sqrt{2t\cos(t) - 2\sin(t) + 1}}$$

Plan

Równania liniowe

Rozważmy najpierw równanie **jednorodne**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y = 0$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int a(t)\,\mathrm{d}t \\ \ln(ky) &= -\int a(t)\,\mathrm{d}t \qquad (ky > 0) \\ y &= c\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad \left(c = \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Równania liniowe

Rozważmy najpierw równanie **jednorodne**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y = 0$$

Otrzymujemy

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int a(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\ln(ky) = -\int a(t)\,\mathrm{d}t \qquad (ky > 0)$$

$$y = c\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad (c = \frac{1}{k})$$

Równania liniowe

Rozważmy najpierw równanie **jednorodne**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y = 0$$

Otrzymujemy

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int a(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\ln(ky) = -\int a(t)\,\mathrm{d}t \qquad (ky > 0)$$

$$y = c\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad \left(c = \frac{1}{k}\right)$$

Równania liniowe

Rozważmy najpierw równanie **jednorodne**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y = 0$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int a(t)\,\mathrm{d}t \\
\ln(ky) &= -\int a(t)\,\mathrm{d}t \qquad (ky > 0) \\
y &= c\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad (c = \frac{1}{k})
\end{aligned}$$

Równania liniowe niejednorodne

Przykłady równań jednorodnych:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0 \Rightarrow y = c\exp(-t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2ty = 0 \Rightarrow y = c\exp(-t^2)$$

Równania **niejednorodne**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y = b(t)$$

rozwiązujemy metodą uzmienniania stałej w rozwiązaniu równania jednorodnego, tzn. przyjmuje się

$$y = c(t)\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Równania liniowe niejednorodne

Przykłady równań jednorodnych:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0 \Rightarrow y = c\exp(-t)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2ty = 0 \Rightarrow y = c\exp(-t^2)$$

Równania **niejednorodne**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y = b(t)$$

rozwiązujemy metodą uzmienniania stałej w rozwiązaniu równania jednorodnego, tzn. przyjmuje się

$$y = c(t)\exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Równania liniowe niejednorodne — Przykład 1

Rozważmy równanie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 2$$

Równanie jednorodne ma rozwiązanie $y = c\exp(-t)$, więc dla równania niejednorodnego spróbujmy rozwiązania postaci

$$y(t) = c(t)\exp(-t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\exp(-t) - c(t)\exp(-t)$$

Podstawiając to do równania niejednorodnego mamy

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} = 2\exp(t)$$

skąd

$$c(t) = 2\exp(t) + k$$

czyli

$$y(t) = 2 + k\exp(-t)$$

Równania liniowe niejednorodne — Przykład 1

Rozważmy równanie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 2$$

Równanie jednorodne ma rozwiązanie $y = c\exp(-t)$, więc dla równania niejednorodnego spróbujmy rozwiązania postaci

$$y(t) = c(t)\exp(-t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\exp(-t) - c(t)\exp(-t)$$

Podstawiając to do równania niejednorodnego mamy

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} = 2\exp(t)$$

skąd

$$c(t) = 2\exp(t) + k$$

czyli

$$y(t) = 2 + k\exp(-t)$$

Równania liniowe niejednorodne — Przykład 2

Rozważmy równanie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2ty = t^3$$

Równanie jednorodne ma rozwiązanie $y = c\exp(-t^2)$, więc dla równania niejednorodnego spróbujmy rozwiązania postaci

$$y(t) = c(t)\exp(-t^2)$$

Podstawiając je do równania niejednorodnego mamy

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} = t^3 exp(t^2)$$

skąd

$$c(t) = \int t^3 \exp(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\exp(t^2)(t^2-1) + k$$

czyli $y(t) = \dfrac{1}{2}(t^2-1) + k\exp(-t^2)$.

Plan

Równanie jednorodne

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + cy = 0$$

rozwiązuje się podstawiając $y = \exp(\lambda t)$, co prowadzi do

$$\exp(\lambda t)\left(\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0$$

Ponieważ zawsze $y = \exp(\lambda t) \neq 0$, musimy mieć

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

1. $\Delta > 0 \Rightarrow y = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t)$
2. $\Delta = 0 \Rightarrow y = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 t \exp(\lambda_1 t)$
3. $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = p \pm j\omega \Rightarrow y = c_1 \exp(pt)\cos(\omega t) + c_2 \exp(pt)\sin(\omega t)$

Przykład: $\mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}t^2 + y = 0$.