Równania różniczkowe — metody numeryczne

Dariusz Uciński

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wykład 9

Metoda Eulera

Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

którego rozwiązanie chcemy wyznaczyć w przedziale $[t_0, t_f]$.

Podzielmy $[t_0, t_f]$ na N podprzedziałów o długości

$$h = \frac{t_f - t_0}{N}$$

Wielkość h nazywamy *długością kroku*. Ustalamy

$$t_k = t_0 + kh, \quad k = 1, \ldots, N$$

Metoda Eulera

Przybliżmy pochodną w chwili t_k ilorazem różnicowym:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$$

Można więc zapisać

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = f(t_k, y(t_k))$$

Oznacza to, że dla $k = 1, \dots, N$ zachodzi

Schemat Eulera wprzód

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\, f(t_k, y(t_k))$$

Przybliżmy pochodną w chwili t_k ilorazem różnicowym:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$$

Można więc zapisać

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = f(t_k, y(t_k))$$

Oznacza to, że dla $k = 1, \ldots, N$ zachodzi

Schemat Eulera wprzód

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\, f(t_k, y(t_k))$$

Alternatywne wyprowadzenie metody Eulera

Całkując obie strony równania

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

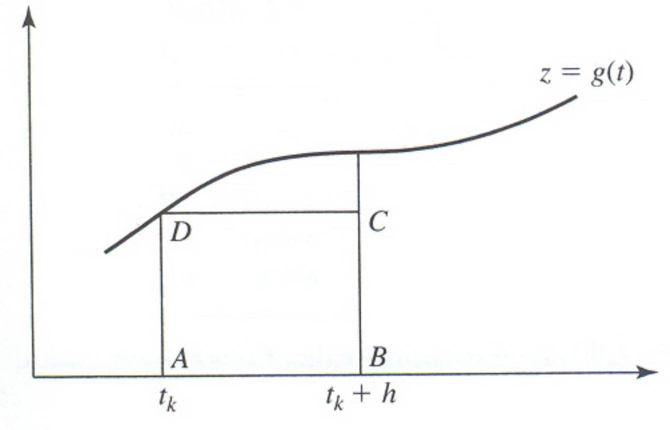
otrzymamy

$$\int_{t_k}^{t_k+h} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \int_{t_k}^{t_k+h} f(t, y(t)) \,\mathrm{d}t$$

czyli

$$y(t_k + h) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_k+h} \underbrace{f(t, y(t))}_{g(t)} \,\mathrm{d}t$$

Alternatywne wyprowadzenie metody Eulera



Mamy formułę prostokątów:

$$\int_{t_k}^{t_k+h} g(t)\,\mathrm{d}t \approx h\,g(t_k)$$

Tu inaczej przybliżmy pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h}$$

Prowadzi to do schematu niejawnego:

Schemat Eulera wstecz

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$$

Pytanie: Jak to rozwiązywać?

Metoda Eulera nie jest zbyt dokładna, dlatego też potrzeba bardziej wyrafinowanych technik.

Tu inaczej przybliżmy pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h}$$

Prowadzi to do schematu niejawnego:

Schemat Eulera wstecz

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\, f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$$

Pytanie: Jak to rozwiązywać?

Metoda Eulera nie jest zbyt dokładna, dlatego też potrzeba bardziej wyrafinowanych technik.

Schemat Eulera wstecz

Tu inaczej przybliżmy pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}y(t_k)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h}$$

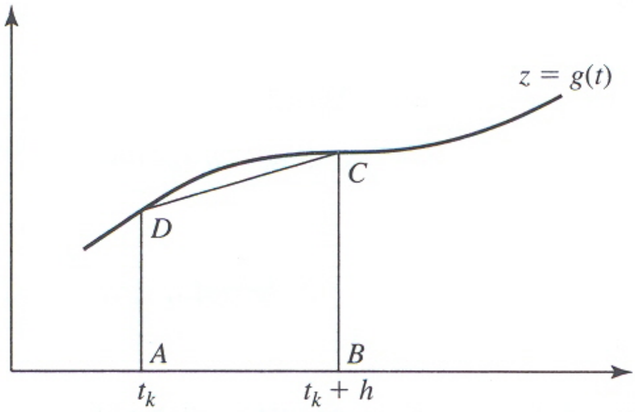
Prowadzi to do schematu niejawnego:

Schemat Eulera wstecz

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$$

Pytanie: Jak to rozwiązywać?

Metoda Eulera nie jest zbyt dokładna, dlatego też potrzeba bardziej wyrafinowanych technik.



Mamy formułę trapezów:

$$\int_{t_k}^{t_k+h} g(t)\,\mathrm{d}t \approx h\frac{g(t_k)+g(t_{k+1})}{2}$$

Algorytm przewidywania i korekcji (metoda Heuna)

Z równości

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underbrace{f(t, y(t))}_{g(t)} \, \mathrm{d}t$$

wynika więc

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{h}{2}\Big[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, \underbrace{y(t_{k+1})}_{\text{nieznane!}})\Big]$$

Jest to więc schemat niejawny, który można uważać za połączenie algortmów Eulera wprzód i wstecz (dlaczego?).

Pytanie: Jak uczynić go użytecznym?

Algorytm przewidywania i korekcji (metoda Heuna)

Przewidywanie (predykcja) — por. metodę Eulera

$$y^\star(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,f(t_k, y(t_k))$$

Korekcja

$$y(t_k + h) = y(t_k) + \frac{h}{2}\Big[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y^\star(t_{k+1}))\Big]$$

Etap korekcji można implementować z zastosowaniem metody iteracji prostej.

Algorytm przewidywania i korekcji (metoda Heuna)

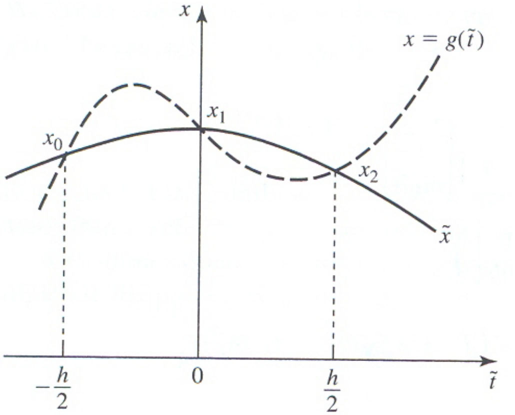
Przewidywanie (predykcja) — por. metodę Eulera

$$y^\star(t_{k+1}) = y(t_k) + h\, f(t_k, y(t_k))$$

Korekcja

$$y(t_k + h) = y(t_k) + \frac{h}{2}\Big[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y^\star(t_{k+1}))\Big]$$

Etap korekcji można implementować z zastosowaniem metody iteracji prostej.



Mamy formułę Simpsona:

$$\int_{t_k}^{t_k+h} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{h}{6}(x_0 + 4x_1 + x_2)$$

Uzasadnienie

Przybliżając $g(t)$ parabolą $at^2 + bt + c$ mamy

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a\frac{h^2}{4} - b\frac{h}{2} + c \\
x_1 &= c \\
x_2 &= a\frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c
\end{aligned}
$$

skąd

$$
\begin{aligned}
c &= x_1 \\
b &= \frac{x_2 - x_0}{h} \\
a &= \frac{2}{h^2}(x_0 - 2x_1 + x_2)
\end{aligned}
$$

Uzasadnienie (c.d.)

Pole pod parabolą wynosi

$$\begin{aligned}\int_{-h/2}^{h/2} (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{2}{h^2}(x_0 - 2x_1 + x_2)t^2 + \frac{x_2 - x_0}{h} t + x_1 \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{h}{6}(x_0 + 4x_1 + x_2)\end{aligned}$$

Algorytm Rungego

Z równości

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

wynika więc

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{h}{6}(m_0 + 4m_1 + m_3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} m_0 &= f(t_k, y(t_k)) \\ m_1 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + m_0\frac{h}{2}) \\ m_2 &= f(t_k + h, y_k + m_0 h) \\ m_3 &= f(t_k + h, y_k + m_2 h) \end{aligned}$$