Badania operacyjne

Lista zadań projektowych nr 4

1. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2$$

   W dowolnym punkcie $\boldsymbol{x}^0 = (x_1, x_2)$ wyznaczyć:

   (a) gradient,

   (b) pochodną w kierunku $\boldsymbol{d} = [1, 1]^T$,

   (c) hesjan.

2. Wynaczyć w dowolnym punkcie $\boldsymbol{x}^0$ gradient i hesjan funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ określonej następująco:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$$

   gdzie $\boldsymbol{A}$ jest dowolną macierzą o wymiarach $n \times n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

3. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ określona wzorem:

$$f(x) = x + 2|x|$$

   (a) Wyznaczyć subróżniczkę f w dowolnym punkcie x^0.

   (b) Wyznaczyć gradient f w punktach, w których f jest różniczkowalna.

   (c) Wyznaczyć jednostronne pochodne w kierunkach $d^1 = 1$, $d^2 = -1$ w punkcie $x^0 = 0$.

4. Funkcja $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{77x^4}{240} + \frac{71x^3}{360} - \frac{7x^2}{120} + \frac{x}{120}$ posiada cztery ekstrema w przedziale $[0, 1]$ (zauważmy, że $f'(x) = (x - 1/2)(x - 1/3)(x - 1/4)(x - 1/5)$). Przedstawić na wykresie zależność punktu ekstremum, do którego jest zbieżna metoda Newtona, od punktu startowego (założyć, że punkty startowe wybiera się z przedziału $[0, 1]$).

5. Wyznaczyć minimum funkcji f metodą złotego podziału z dokładnością $\varepsilon = 0.01$ na przedziale $[-10, 10]$. Funkcja f dana jest następująco:

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2|$$

6. Wyznaczyć minimum funkcji f metodą złotego podziału z dokładnością $\varepsilon = 0.01$ na przedziale $[-10, 1]$. Funkcja f dana jest następująco:

$$f(x) = (1 - e^x sin(x))^2$$

7. Wyznaczyć minimum funkcji f metodą największego spadku z dokładnością $\varepsilon = 0.01$ na przedziale $[-3, 10]$. Funkcja f dana jest następująco:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

Przeanalizować zbieżność metody do rozwiązania w zależności od długości kroku.

8. Wyznaczyć minimum funkcji f metodą największego spadku z dokładnością $\varepsilon = 0.01$ na przedziale $[\pi, 2\pi]$. Funkcja f dana jest następująco:

$$f(x) = -\sin(x)/x$$

Przeanalizować zbieżność metody do rozwiązania w zależności od długości kroku.

9. Zbadać punkty stacjonarne funkcji:
   (a) $f(x, y, z) = -x^2 - 6y^2 - 23z^2 - 4xy + 6xz + 20yz$
   (b) $f(x, y, z) = x^3 + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$

10. Zbadać punkty stacjonarne funkcji:
   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
   (b) $f(x, y, z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$, $(a > 0)$

11. Znaleźć punkt na płaszczyźnie:

$$x + 2y + 2z = 4$$

którego odległość od początku układu współrzędnych $(0, 0, 0)$ jest najmniejsza. Jaka jest ta odległość? Jak zmieni się rozwiązanie po zmianie powyższej płaszczyzny na płaszczyznę $x = 2$?

12. Wyznaczyć gradienty, a następnie wszystkie punkty stacjonarne poniższych funkcji:
   (a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 3y - x$
   (b) $f(x, y) = ye^x$
   (c) $f(x, y) = 6xy - 2x^2 - 3y^2$

13. Wyznaczyć gradienty, a następnie wszystkie punkty stacjonarne poniższych funkcji:
   (a) $f(x, y) = x + 2y + x^2 - 3y^2$
   (b) $f(x, y) = xe^y$
   (c) $f(x, y) = -2x + xy^3 + 2x^3$

14. Badając hesjan sklasyfikować punkty stacjonarne funkcji f jako punkty minimum lub maksimum:
   (a) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 9x$
   (b) $f(x, y) = (x - 2)(y - 2)(x + y - 2)$
   (c) $f(x, y) = e^x + e^{-y}$

15. Badając hesjan sklasyfikować punkty stacjonarne funkcji f jako punkty minimum lub maksimum:

    (a) $f(x, y) = 120x + 120y - xy - x^2 - y^2$

    (b) $f(x, y) = xy + 8/y + 2/x$

    (c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$