Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Badania Operacyjne

Laboratorium

Programowanie liniowe - metoda graficzna

1. Rozwiązać za pomocą metody graficznej poniższe Zadania Programowania Liniowego (ZPL):

$$\text{a)}\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ \frac{13}{6}x_1 + x_2 \leqslant 13 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 20 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}, \quad \text{b)}\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + x_2 \to \max \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant -2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}, \quad \text{c)}\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \to \max \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ -2x_1 + x_2 \geqslant -6 \\ x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

2. Znaleźć minimum następującej funkcji

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6 \geqslant 0 \\ -x_1 - x_2 + 8 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 + 18 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Czy rozwiązanie zmieni się dla funkcji celu $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

3. Stosując metodę graficzną przedyskutować istnienie i ilość rozwiązań poniższego problemu programowania liniowego w zależności od wartości parametru α dla funkcji celu

$$\text{a) } f(x) = \alpha x_1 + x_2 \to \max, \qquad \text{b) } f(x) = \alpha x_1 + x_2 \to \min:$$

i ograniczeniach

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 5 \geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 - 5 \leqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 8 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

4. Pewne przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby: W_1 i W_2. W procesie produkcji tych wyrobów zużywa się wiele środków, spośród których dwa są limitowane. Limity te wynoszą: środek I - 36000 jednostek, srodek II - 50000 jednostek. Nakłady limitowanych środków na jednostkę produkcji są dane w tabeli:

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	W_1	W_2
I	6	6
II	10	5

Należy także uwzględnić, że zdolność produkcyjna jednego z agregatów nie pozwala wyprodukować więcej niż 4000 sztuk wyrobu W_2. Określić optymalne rozmiary produkcji maksymalizujące zysk, przy założeniu, że zysk ze sprzedaży obu wyrobów jest jednakowy.

5. Dziecko w pewnym wieku potrzebuje tygodniowo co najmniej 120 jednostek witaminy A, 60 jedn. witaminy D, 36 jedn. witaminy C oraz 180 jedn. witaminy E. Witaminy te zawarte są w dwóch produktach: P_1 i P_2. Ze względu na uboczne szkodliwe działanie witaminy A należy dostarczyć jej co najwyżej 240 jedn. Zawartość poszczególnych witamin w jednostce produktu oraz ceny jednostkowe produktów są dane tabelą:

Witaminy	Zawartość witaminy w jednostce produktu	
	P_1	P_2
A	6	3
D	1	3
C	9	1
E	6	6
Cena	1	2

Ile należy zakupić produktów P_1 i P_2, aby dostarczyć dziecku witamin w wymaganych ilościach przy minimalnym koszcie zakupu produktów P_1 i P_2?

6. Przedsiębiorstwo rolnicze prowadzi hodowlę tuczników. Tuczniki są żywione dwoma rodzajami pasz. Ile należy dzienne dostarczyć paszy I i II rodzaju,aby zapewnić trzodzie niezbędne minima substancji odżywczych przy jak najmniejszym koszcie związanym z zakupem wymienionych pasz? Kilogram paszy I kosztuje 5 zł, a kilogram paszy II - 2,5 zł. Zawartość substancji odżywczych w 1 kg poszczególnych pasz wynosi:

Substancje odżywcze	Zawartość w 1 kg paszy	
	I	II
Białko	0,500	0,250
Węglowodany	0,100	0,030
Sole + witaminy	0,010	0,010

Niezbędne minima dzienne poszczególnych substancji odżywczych wynoszą: węglowodany - 3 kg, witaminy + sole - 0,5 kg. Ilość spożywanego białka nie powinna przekroczyć 25 kg dziennie. Podać wartość funkcji celu (minimalny dzienny koszt wyżywienia) dla rozwiązania optymalnego. Czy rozwiązanie zmieni się, jeżeli pasza II podrożeje i jej cena będzie wynosić 5 zł?

7. ($\star$) Rozwiązać graficznie zadania:

a)
$$x + 3y \to \max$$
$$\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 2 \\ |x + y| \leqslant 1 \end{cases}$$

b)
$$x - 2y + 2 \to \min$$
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y \leqslant 1 \\ x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y \leqslant 0 \\ x^2 <= 4 \end{cases}$$

c)
$$x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 3 \to \max$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x^2 - y^2 \geqslant \frac{1}{4} \end{cases}$$

Które z nich można sprowadzić do programowania liniowego?

8. Środki do czyszczenia podłóg ocenia się na podstawie trzech wskaźników: a) własności czyszczących, b) własności dezynfekujących, c) drażniącego działania na skórę. Każdy z tych wskaźników ocenia się w skali liniowej od 0 do 100 jednostek. Produkt wypuszczany na rynek powinien mieć w skrajnym przypadku 60 jednostek własności czyszczących i 60 jednostek własności dezynfekujących w odpowiednich skalach. Jednocześnie działanie podrażniające skórę powinno być minimalne. Końcowy produkt powinien być mieszanką trzech podstawowych środków czyszczących o własnościach przedstawionych w tabeli:

Środek	Działanie		
	czyszczące	dezynfekujące	podrażniające
A	90	30	70
B	65	85	50
C	45	70	10

Ze względów technologicznych zawartość środka A nie może być większa niż 80% pozostałych składników. Sformułować zadanie znajdowania optymalnej mieszanki jako zadanie programowania liniowego (ZPL). Rozwiązać je metodą graficzną.

9. Fabryka samochodów powinna pracować 24 godziny na dobę zgodnie z poniższą tabelą:

Godziny	2–10	10–18	18-2
minimalna liczba robotów przemysł.	12	17	16

Każdy z robotów powinien pracować 16 godzin bez przerwy, a potem na kolejnej zmianie przechodzi przerwę serwisową. Znaleźć minimalną liczbę maszyn spełniającą podane warunki. Rozwiązać metodą graficzną.

10. ($\star$) W drukarce 3D trzy wzajemnie prostopadłe wiązki laserowe naświetlają przezroczyste naczynie w kształcie oktaedru (ośmiościanu foremnego) w kierunkach równoległych do jego przekątnych, w taki sposób, że spotykają się w jednym punkcie P. Energia rozproszenia wiązki jest wprost proporcjonalna do mocy lasera oraz odległości przebytej przez wiązkę od powierzchni oktaedru do punktu skupienia P. Znaleźć położenie punktu P, w którym energia będzie maksymalna, jeżeli moc wiązek laserowych to odpowiednio 1, 2 i 5 W (założyć, że laser przenika bezpośrednio do naczynia bez załamania światła na ściankach). Rozwiązać zadanie metodą graficzną.