# ZAGADNIENIA PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Maciej Patan

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

# WSTĘP

➢ Zagadnienia programowania liniowego – często spotykane w życiu codziennym

- wybór asortymentu produkcji – jakie wyroby i w jakich ilościach powinno produkować przedsiębiorstwo w celu zmaksymalizowania zysku lub przychodu ze sprzedaży

- optymalny dobór składu mieszanin – jakie ilości produktów żywnościowych należy zakupić, aby przy racjonalnym zaspokojeniu potrzeb organizmu obniżyć do minimum koszty wyżywienia

- wybór procesu technologicznego – określenie skali czy intensywności dostępnych procesów technologicznych, aby wytworzyć określone ilości produktów przy możliwie najniższych kosztach.

➢ Charakter zagadnień programowania liniowego

- funkcja poddawana optymalizacji ma postać liniową
- ograniczenia nałożone na zmienne są liniowe

➢ Zagadnienie programowania liniowego ma naturę kombinatoryczną

| |
|---|
| rozwiązanie optymalne, o ile istnieje, może być znalezione pośród skończonego zbioru rozwiązań określonych za pomocą ograniczeń liniowych |

# SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Cel Zagadnień Programowania Liniowego (ZPL)

> znalezienie zbioru nieujemnych wartości zmiennych, minimalizujących liniową funkcję celu i spełniających pewien zbiór ograniczeń liniowych

Postać standardowa:

Znaleźć minimum

$$z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

przy warunkach

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant 0$$

inna definicja:

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$X = \{\boldsymbol{x} \in R^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant 0\}$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ – macierz $m \times n$ $(m \leqslant n)$, $\boldsymbol{c}$ – $n$-elementowy wektor kosztów,
$\boldsymbol{x}$ – $n$-elementowy wektor niewiadomych, $\boldsymbol{b}$ – $m$-elementowy wektor ograniczeń

## Sprowadzanie do postaci standardowej

| |
|---|
| Każde zagadnienie programowania liniowego można sprowadzić do postaci standardowej |

Nierówność

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$

można sprowadzić do równości poprzez wprowadzenie zmiennej uzupełniającej (sztucznej) $x_{n+1} \geqslant 0$ następująco:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

## UWAGA 1

Jeśli nierówność ma przeciwny znak wtedy zmienna $x_{n+1}$ powinna zostać odjęta !

Przykład 1.1. Sprowadzić do postaci standardowej ZPL

$$
\begin{aligned}
\min[z = -3x_1 + 5x_2 - 9x_3] \\
-x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 15 \\
-x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6 \\
x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, 3
\end{aligned}
$$

Wprowadzamy sztuczne zmienne $x_4$ ze znakiem $-$ i $x_5$ ze znakiem $+$
Otrzymujemy postać standardową :

$$
\begin{aligned}
\min[z = -3x_1 + 5x_2 - 9x_3] \\
-x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad = 15 \\
-x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 6 \\
x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, 5
\end{aligned}
$$

**UWAGA 2**

Jeśli funkcja celu ma być maksymalizowana, należy pomnożyć ją przez -1.
Zmienia to maksymalizację na minimalizację

Przykład 1.2. Sprowadzić do postaci standardowej ZPL

$$\max[z = -3x_1 + 5x_2 - 9x_3]$$
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 15$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

Zamieniamy maksymalizację na minimalizację

$$\min[z = 3x_1 - 5x_2 + 9x_3]$$
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 15$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

**UWAGA 3**

Jeśli program jest podany w postaci standardowej, ale zmienne, jedna lub więcej, są swobodne (nie muszą być nieujemne), to problem można sprowadzić do postaci standardowej zastępując swobodne zmienne $x_i$ zmiennymi $x_i = \overline{x}_i - x_i^*$, gdzie $\overline{x}_i$ i $x_i^*$ są nieujemne

Przykład 1.3. Sprowadzić do postaci standardowej

$$\min[z = 3x_1 - 5x_3 + 9x_4]$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 15$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 6$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 5, 6$$

zmienna swobodna - $x_4$. Zastępujemy ją różnicą $x_4 = \overline{x}_4 - x_4^*$

$$\min[z = 3x_1 - 5x_3 + 9\overline{x}_4 - 9x_4^*]$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 + 3\overline{x}_4 - 3x_4^* - x_5 = 15$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 + \overline{x}_4 - x_4^* + x_6 = 6$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad \overline{x}_4 \geqslant 0, \quad x_4^* \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0, \quad x_6 \geqslant 0$$

Przyjmując dla wygody oznaczenia $x_4 = \overline{x}_4$ i $x_7 = x_4^*$ otrzymujemy

$$\min[z = 3x_1 - 5x_3 + 9x_4 - 9x_7]$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_7 - x_5 = 15$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_7 + x_6 = 6$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 7$$

# ROZWIĄZYWANIE ZPL

➢ Definicje

- Macierzą bazową układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nazywamy nieosobliwą macierz kwadratową $\boldsymbol{B}$ o wymiarach $m \times m$, utworzoną z liniowo niezależnych kolumn $\boldsymbol{a}^i$ macierzy $\boldsymbol{A}$

- Rozwiązaniem bazowym układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nazywamy jego rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ o takiej postaci, że $\boldsymbol{a}^j$, odpowiadające zmiennym $x_j \neq 0$, tworzą układ liniowo niezależny

- Rozwiązanie bazowe nazywamy dopuszczalnym, gdy $\boldsymbol{x} \geqslant 0$

- Rozwiązanie bazowe nazywamy niezdegenerowanym, jeśli liczba niezerowych współrzędnych $x_j$ jest równa rzędowi macierzy $\boldsymbol{A}$. W przeciwnym wypadku nazywamy je zdegenerowanym

➢ Właściwości

1. Każdej macierzy bazowej $\boldsymbol{B}$ odpowiada rozwiązanie bazowe określone następująco: zmienne $x_j$ odpowiadające kolumnom $a^j$ tworzącym $B$ (zmienne bazowe) określa równanie

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

   pozostałe zmienne (zmienne niebazowe) są równe zero

2. Jeśli układ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jest niesprzeczny, to ma rozwiązanie bazowe

3. Jeżeli $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{m}$ to istnieją macierze bazowe

4. Jeżeli $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) < \mathrm{m}$ to występuje redundancja (nadmiarowość). Nie istnieją wówczas macierze bazowe, lecz nadal istnieją rozwiązania bazowe

5. Jeśli ZPL jest ograniczone, $\inf \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} > -\infty$, to wśród rozwiązań bazowych istnieje rozwiązanie optymalne

Przykład 1.4. Dane jest ZPL

$$
\begin{aligned}
\max[z = x_1 + 2x_2]\\
x_1 + x_2 \leqslant 10\\
-2x_1 + x_2 \leqslant 4\\
x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

a) sprawdzić czy występuje redundancja

Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej

$$
\begin{aligned}
\min[z = -x_1 - 2x_2]\\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 10\\
-2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 4\\
x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

Sprawdzamy warunek na redundancję $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) < \mathrm{m}$
gdzie $m$ liczba nierówności (równości)

$$m = 2 \text{ i } \mathrm{rank}(\mathrm{A}) = 2, \text{ więc nie występuje redundancja}$$

b) znaleźć wszystkie rozwiązania bazowe i dopuszczalne rozwiązania bazowe. Czy są wśród nich zdegenerowane?

Macierz bazowa i jej macierz odwrotna

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \boldsymbol{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie bazowe

$$\boldsymbol{x}_{B_1} = \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b} = [2\ 8]^T \qquad \boldsymbol{x}_1 = [2\ 8\ 0\ 0]^T$$

## Pozostałe rozwiązania

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \boldsymbol{B}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_{B_2} = [-2\ 12]^T \qquad \boldsymbol{x}_2 = [-2\ 0\ 12\ 0]^T$$

$$\boldsymbol{B}_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}^4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \boldsymbol{B}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_{B_3} = [10\ 24]^T \qquad \boldsymbol{x}_3 = [10\ 0\ 0\ 24]^T$$

$$\boldsymbol{B}_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \boldsymbol{B}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_{B_4} = [4\ 6]^T \qquad \boldsymbol{x}_4 = [0\ 4\ 6\ 0]^T$$

$$\boldsymbol{B}_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}^4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \boldsymbol{B}_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_{B_5} = [10\ -6]^T \qquad \boldsymbol{x}_5 = [0\ 10\ 0\ -6]^T$$

$$\boldsymbol{B}_6 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{a}^3 & \boldsymbol{a}^4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \boldsymbol{x}_{B_6} = [10\ 4]^T \qquad x_6 = [0\ 0\ 10\ 4]^T$$

Rozwiązanie bazowe $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$, $\boldsymbol{x}_6$ są dopuszczalne

Żadne z rozwiązań bazowych nie jest zdegenerowane

c) znaleźć rozwiązanie optymalne

$z(\boldsymbol{x}_1) = 18$, $z(\boldsymbol{x}_3) = 10$, $z(\boldsymbol{x}_4) = 8$, $z(\boldsymbol{x}_6) = 0$

Rozwiązanie optymalne: wektor $\boldsymbol{x}_1$

## METODA GRAFICZNA

- W sytuacji, gdy w zadaniu występują dwie zmienne decyzyjne np. $x_1$ i $x_2$, można to zadanie rozwiązać metodą geometryczną
- W metodzie geometrycznej nie doprowadza się zadania do postaci standardowej, lecz pracuje na nim w postaci nierówności
- Wszystkie nierówności nanosi się na wykres w postaci prostych i półpłaszczyzn. Wytyczają one obszar rozwiązań dopuszczalnych
- Na obszar rozwiązań dopuszczalnych rzutuje się prostą którą określa funkcja celu. Przesuwa się ją równolegle jak najdalej od środka układu współrzędnych
- Najdalej wysunięta prosta która jeszcze przecina zbiór rozwiązań dopuszczalnych wyznacza minimum

Przykład 3.1.

Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby $w_1$ i $w_2$. W procesie produkcji tych wyrobów zużywa się wiele środków, spośród których dwa są limitowane. Limity te wynoszą: środek I - 96000 j., środek II - 80000 j. Nakłady limitowanych środków na jednostkę wyrobów $w_1$ i $w_2$ zawiera poniższa tabela.

| środki produkcji | Jednostkowe nakłady | |
|---|---|---|
| | $w_1$ | $w_2$ |
| I | 16 | 24 |
| II | 16 | 10 |

Wiadomo także, że zdolności produkcyjne z wydziałów stanowiącego wąskie gardło procesu produkcyjnego nie pozwalają produkować więcej niż 3000 szt. wyrobów $w_1$ oraz 4000 szt. wyrobów $w_2$. Ponadto działająca w ramach przedsiębiorstwa komórka analizy rynku ustaliła optymalne proporcje produkcji które kształtują się odpowiednio jak 3:2. Cena sprzedaży (w tys zł.) jednostki wyrobu $w_1$ wynosi 30, a wyrobu $w_2$ - 40. Zaplanować wielkość produkcji maksymalizującej zysk.

Niech $x_1$ – ilość produkcji wyrobu $w_1$, $x_2$ – ilość produkcji wyrobu $w_2$

- Z limitów środków produkcji otrzymujemy

$$16x_1 + 24x_2 \leqslant 96000$$
$$16x_1 + 10x_2 \leqslant 80000$$

- Analizując zdolności produkcyjne dostajemy

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 3000$$
$$0 \leqslant x_2 \leqslant 4000$$

- Wykorzystując informacje z komórki analizy rynku

$$x_2 = \tfrac{2}{3}x_1$$

- Funkcja celu

$$\max[z(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2]$$

- Model matematyczny

$$\max[z(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2]$$

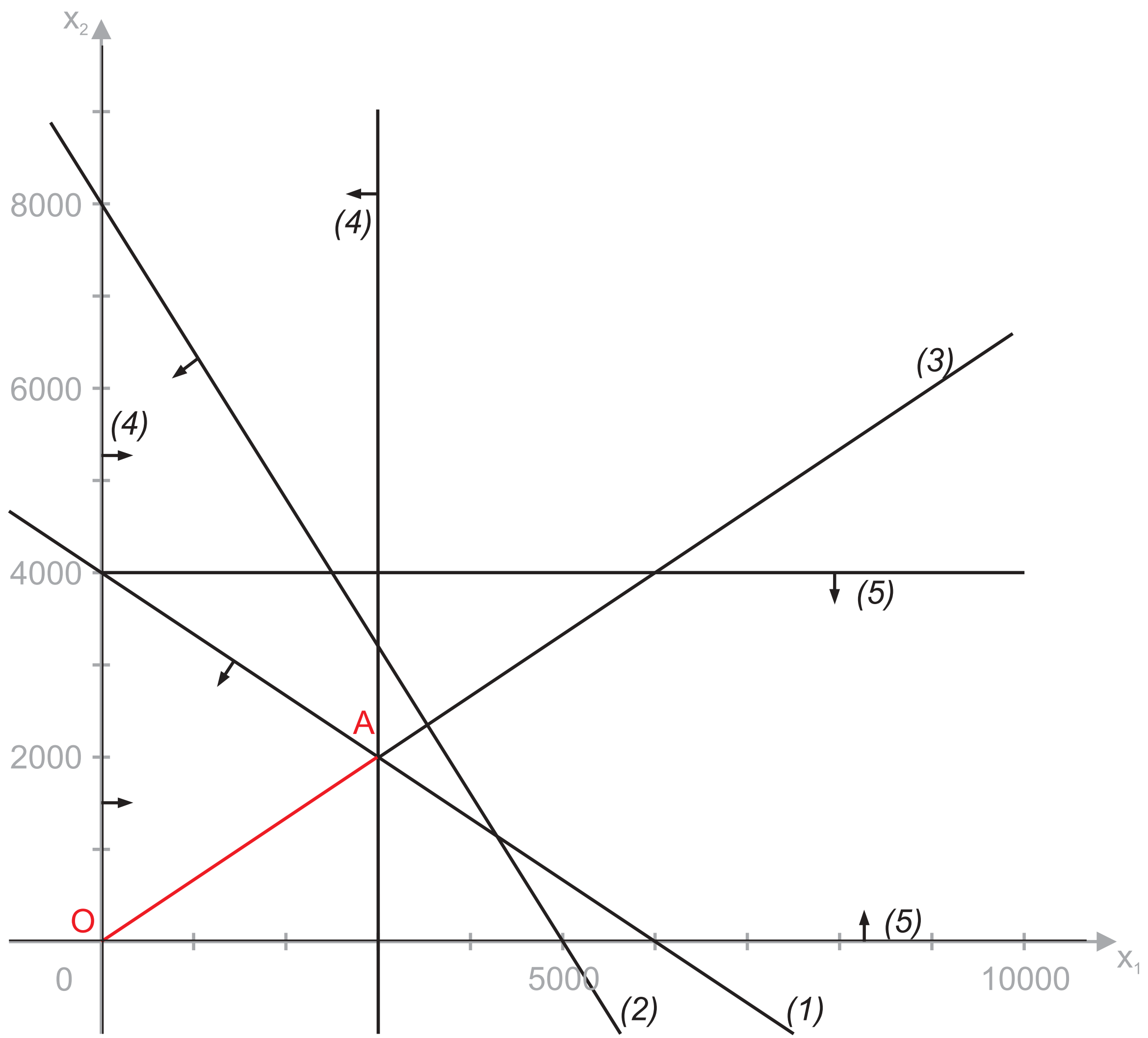
$$16x_1 + 24x_2 \leqslant 96000 \qquad (1)$$

$$16x_1 + 10x_2 \leqslant 80000 \qquad (2)$$

$$x_2 = \frac{2}{3}x_1 \qquad (3)$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 3000 \qquad (4)$$

$$0 \leqslant x_2 \leqslant 4000 \qquad (5)$$




Zbiorem rozwiązań dopuszczalnych jest odcinek $\overline{OA}$, stąd rozwiązania należy szukać na tym odcinku

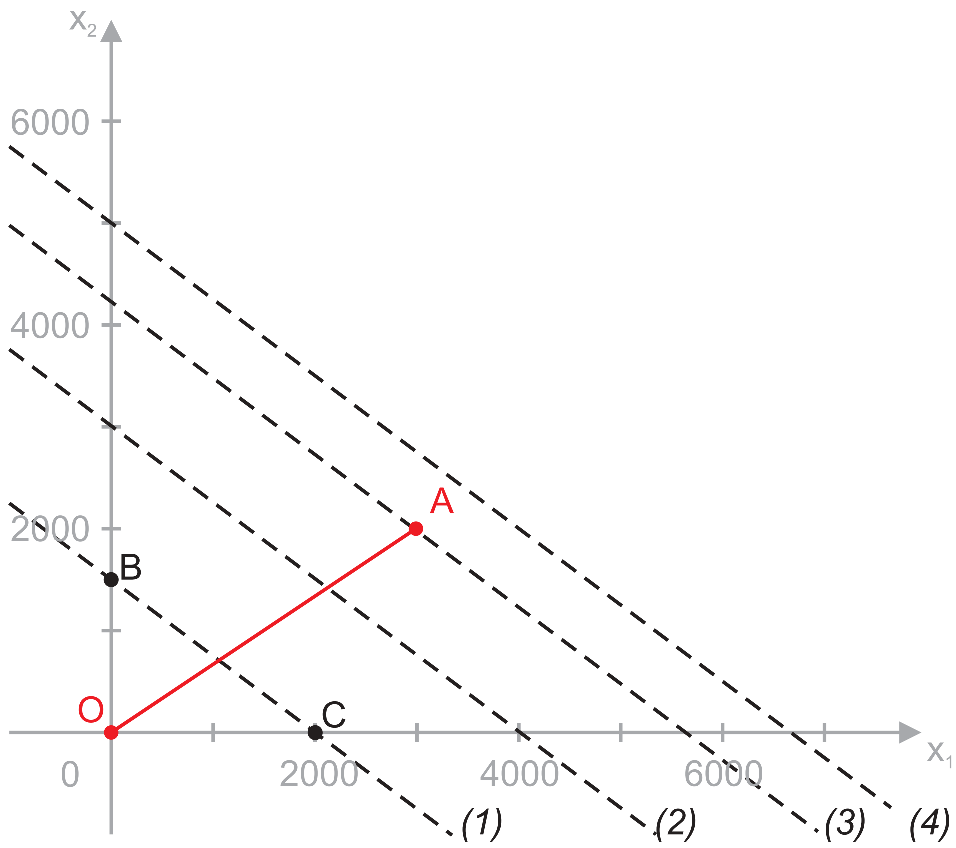
Biorąc dowolną wspólną wielokrotność parametrów funkcji celu tj. 30 i 40 wyznaczymy linię jednakowego przychodu np dla $30x_1 + 40x_2 = 60000$ - odcinek $\overline{\text{BC}}$

*(1)* $30x_1 + 40x_2 = 60000$

*(2)* $30x_1 + 40x_2 = 120000$

*(3)* $30x_1 + 40x_2 = 170000$

*(4)* $30x_1 + 40x_2 = 200000$



- Przesuwamy linię równolegle wzdłuż odcinka $\overline{\text{OA}}$
- Kierunek przesuwania izolinii wynika z kryterium optymalizacji funkcji celu. W rozważanym przykładzie funkcja celu jest maksymalizowana. Oznacza to, że kolejno przyjmujemy coraz to większe wartości wyrazu wolnego przesuwanej prostej (izolinie *(1)-(4)* )
- Izolinie *(1)* i *(2)* przecinają odcinek $\overline{\text{OA}}$ i dopiero izolinia *(3)* trafia na jego koniec w punkcie A. Izolinia *(4)* została przesunięta zbyt daleko i znalazła się poza odcinkiem rozwiązań dopuszczalnych
- Proste *(1)* do *(4)* tworzą rodzinę izolinii, w których parametry przy zmiennych pozostają bez zmian, a zmieniają się jedynie wartości wyrazów wolnych (wartości funkcji celu)
- W tym przypadku rozwiązanie optymalne to punkt przecięcia odcinka $\overline{\text{OA}}$ i izolinii *(3)*

$$x_1^* = 3000 \ i \ x_2^* = 2000$$

dla tych wartości funkcja celu przyjmuje wartość

$$z(x_1^*, x_2^*) = 170000$$

Wartość przychodu ze sprzedaży przy uwzględnieniu optymalnego asortymentu wyniesie $170000$

Przykład 3.2.

Spółdzielnia produkcyjna sporządza mieszankę paszową dla trzody chlewnej z dwóch produktów $P_1$ i $P_2$. Mieszanka ma dostarczać trzodzie chlewnej pewnych składników $S_1$, $S_2$, $S_3$ w ilościach nie mniejszych niż określone minima. Zawartość składników odżywczych w jednostce poszczególnych produktów podaje tabela

| Składnik odżywczy | Produkt | | Minimalna ilość składnika |
|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | |
| $S_1$ | 3 | 9 | 27 |
| $S_2$ | 8 | 4 | 32 |
| $S_3$ | 12 | 3 | 36 |
| Cena w tys. zł. | 6 | 9 | |

Należy zakupić takie ilości produktów $P_1$ i $P_2$, aby dostarczyć trzodzie chlewnej składników odżywczych $S_1$, $S_2$, $S_3$ w ilościach nie mniejszych niż minima określone w tabeli i aby koszt zakupu był minimalny.

Niech $x_1$ - ilość zakupionego produktu $P_1$, $x_2$ - ilość zakupionego produktu $P_2$

- Warunek dla składników odżywczych

$$3x_1 + 9x_2 \geqslant 27$$
$$8x_1 + 4x_2 \geqslant 32$$
$$12x_1 + 3x_2 \geqslant 36$$

- Warunki brzegowe

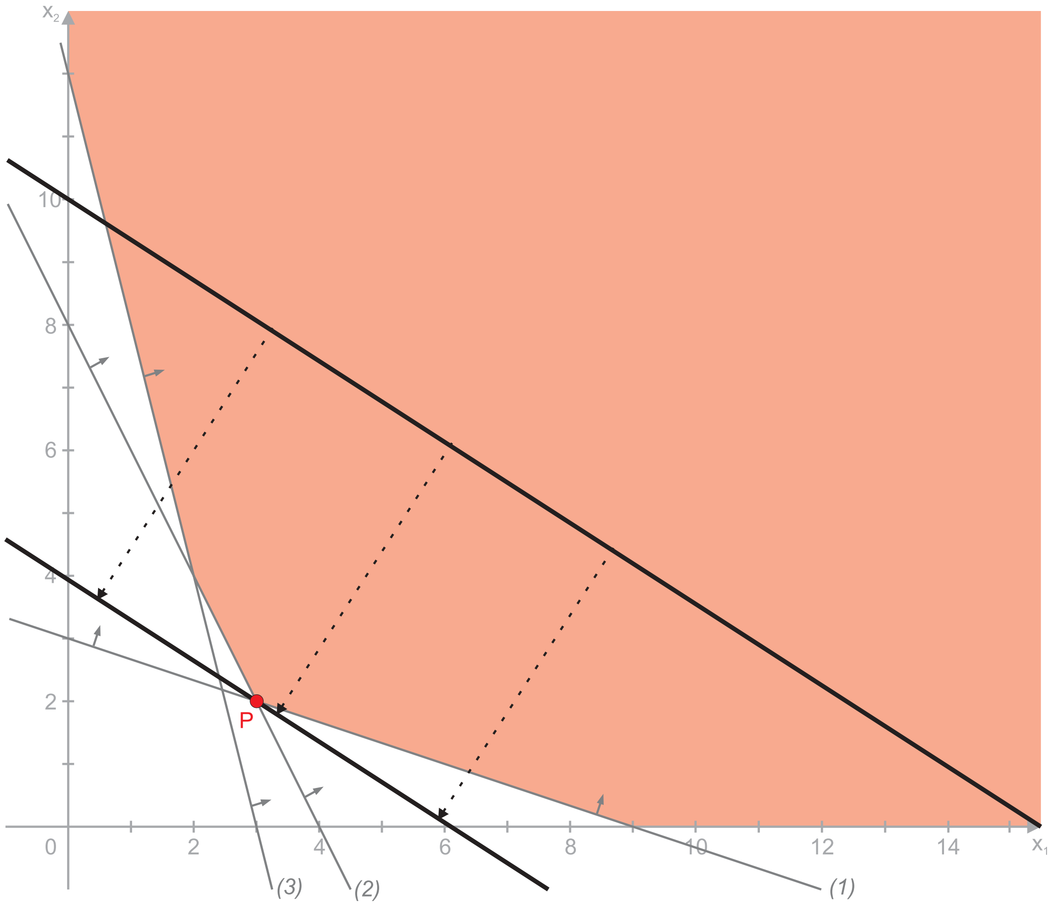
$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0$$

- Funkcja celu

$$\min[z(x_1, x_2) = 6x_1 + 9x_2]$$

- Model matematyczny

$$\min[z(x_1, x_2) = 6x_1 + 9x_2]$$
$$3x_1 + 9x_2 \geqslant 27 \qquad (1)$$
$$8x_1 + 4x_2 \geqslant 32 \qquad (2)$$
$$12x_1 + 3x_2 \geqslant 36 \qquad (3)$$
$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0$$




Punkt optymalny znaleziono dla $x_1^* = 3$ i $x_2^* = 2$. Temu punktowi odpowiada wartość funkcji celu

$$z(x_1^*, x_2^*) = 6 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 36$$

# PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

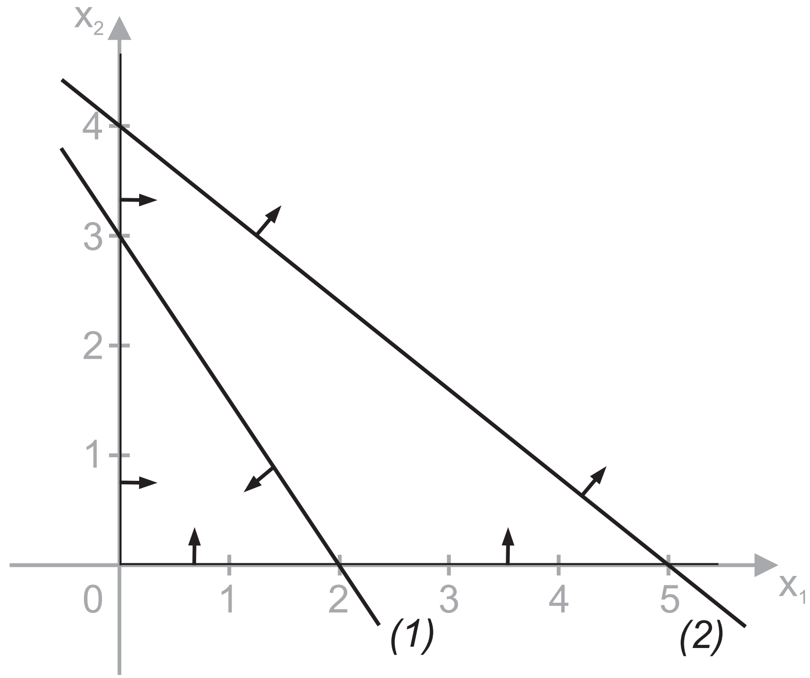
Przypadek I

Rozważmy zestaw ograniczeń

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \qquad (1)$$

$$4x_1 + 5x_2 \geqslant 20 \qquad (2)$$

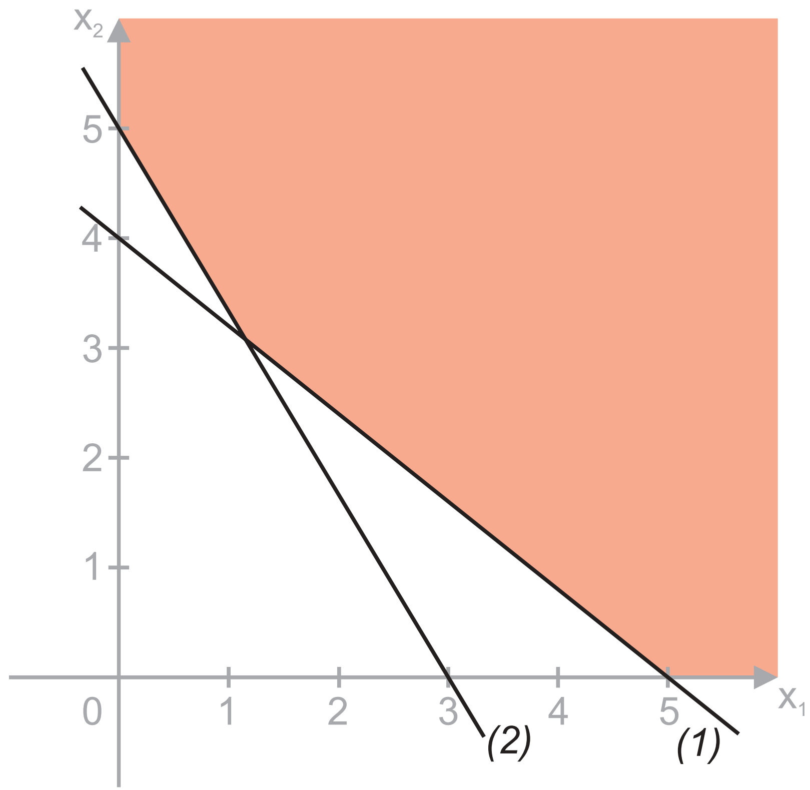
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$




Brak dopuszczalnych rozwiązań, gdyż nie można wyznaczyć obszaru rozwiązań dopuszczalnych

## Przypadek II

$$4x_1 + 5x_2 \geqslant 20 \quad (1)$$
$$5x_1 + 3x_2 \geqslant 15 \quad (2)$$




Nieograniczony zbiór dopuszczalnych rozwiązań. W tym przypadku nie można wyznaczyć wartości $x_1$ i $x_2$ dla których funkcja celu przybierze wartość maksymalną. Maksimum będzie dążyło do nieskończoności

Przypadek III

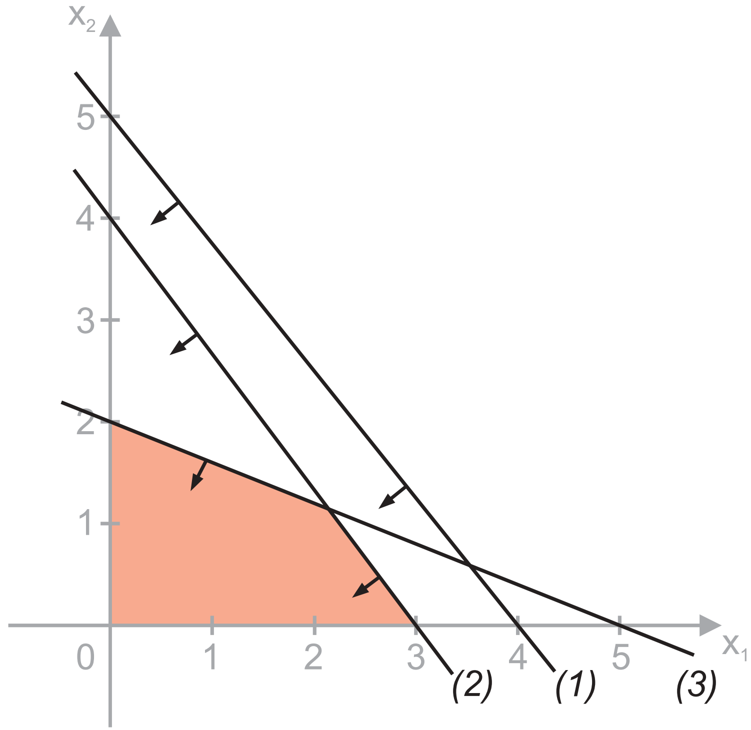
Rozważmy następujące ograniczenia

$$5x_1 + 4x_2 \leqslant 20 \quad (1)$$

$$4x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \quad (2)$$

$$2x_1 + 5x_2 \leqslant 10 \quad (3$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$




Przypadek zbywających ograniczeń. Z rysunku widać że ograniczenie *(1)* jest tutaj nadmiarowe. Nie ono żadnego wpływu na kształt obszaru rozwiązań dopuszczalnych.

## Przypadek IV

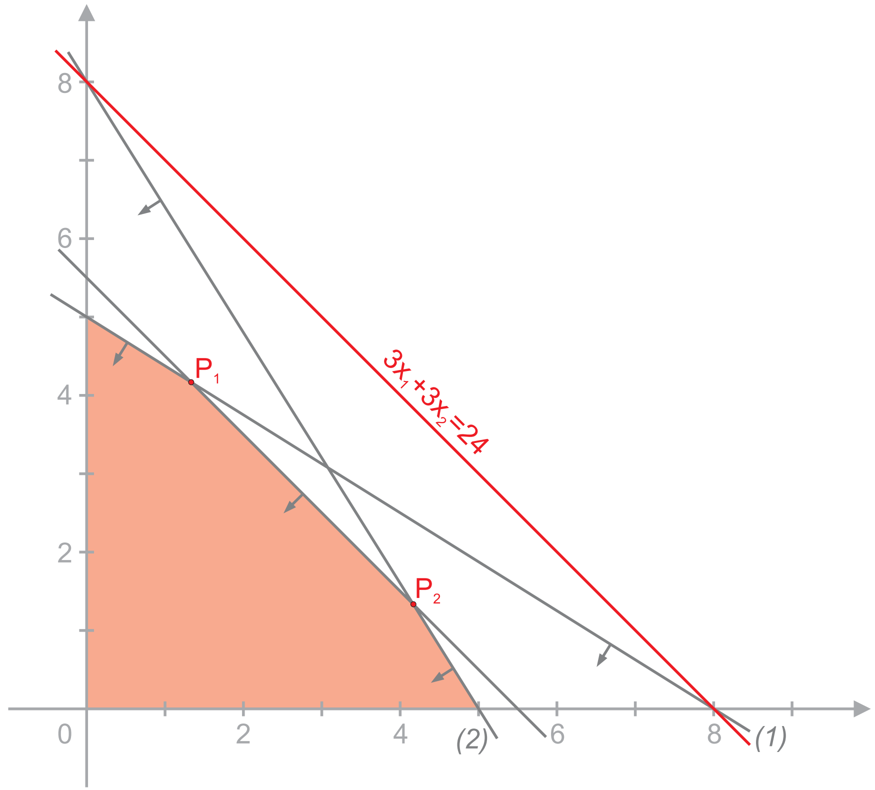
$$\max[z = x_1 + 3x_2]$$

$$8x_1 + 5x_2 \leqslant 40 \qquad (1)$$

$$5x_1 + 8x_2 \leqslant 40 \qquad (2)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 11 \qquad (3)$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0$$




Nieskończenie wiele rozwiązań. Rozważmy izolinię $3x_1 + 3x_2 = 24$, jest ona równoległa do odcinka $\overline{\mathsf{P}_1\ \mathsf{P}_2}$. Każdy punkt znajdujący się na tym odcinku jest rozwiązaniem tego zadania (np. $x_1 = 3$ i $x_2 = 2,5$ czy $x_1 = 2$ $x_2 = 3,5$). Dla wszystkich punktów leżących na odcinku $\overline{\mathsf{P}_1\ \mathsf{P}_2}$ wartość funkcji celu jest równa $z^* = 16.5$