Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

Laboratorium Automatyki i Robotyki

Modelowanie sygnałów i układów w dziedzinie częstotliwości

1. Wyznacz transformaty Laplace'a następujących funkcji czasu
   (a) $tu(t)$
   (b) $\sin(\omega t)u(t)$
   (c) $\cos(\omega t)u(t)$
2. Korzystając z twierdzenia Laplace'a oraz tablicy transformat Laplace'a wyznacz transformaty Laplace'a następujących funkcji czasu
   (a) $e^{-at}\sin\omega t u(t)$
   (b) $e^{-at}\cos\omega t u(t)$
   (c) $t^3u(t)$
3. Korzystając z obliczeń symbolicznych w środowisku Matlab wyznacz transformatę Laplace'a następujących funkcji
   (a) $f(t) = 8t^2\cos(3t + 45^o)$
   (b) $f(t) = 3te^{-2t}\sin(4t + 60^o)$
4. Korzystając z obliczeń symbolicznych w środowisku Matlab wyznacz odwrotną transformatę Laplace'a następujących funkcji
   (a) $G_1(s) = \frac{(s^2+3s+10)(s+5)}{(s+3)(s+4)(s^2+2s+100)}$
   (b) $G_2(s) = \frac{s^3+4s^2+2s+6}{(s+8)(s^2+8s+3)(s^2+5s+7)}$
5. Dany jest układ opisany poniższym równaniem różniczkowym
   $$\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + y = \frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 8x$$
   Wyznacz transmitancje $\frac{Y(s)}{X(s)}$.
6. Wyznacz równania różniczkowe równoważne następującym transmitancjom
   (a) $G(s) = \frac{2s+1}{s^2+6s+2}$
   (b) $G(s) = \frac{s}{(s+4)(s+8)}$
   (c) $G(s) = \frac{9}{s^2+7s+11}$
   (d) $G(s) = \frac{7}{(s+11)(s+12)}$
   (e) $G(s) = \frac{s+2}{s^3+10s^2+11s+18}$
7. Dany jest układ opisany przez następujące równanie różniczkowe
   $$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 3x = 1$$
   gdzie warunki początkowe to $x(0) = 2$ i $\dot{x}(0) = -1$.
   Narysuj schemat blokowy układu reprezentowanego przez powyższe równanie różniczkowe zaznaczając blok transmitancji i odpowiednie wejścia i wyjścia.
   Wskazówka: warunki początkowe ukażą się jako dodatkowe wejścia do układu z zerowymi warunkami początkowymi.
8. Korzystając ze środowiska Matlab dokonaj rozkładu na ułamki proste następującej funkcji
   $$G(s) = \frac{10^4(s+5)(s+70)}{s(s+45)(s+55)(s^2+7s+110)(s^2+6s+95)}$$

9. Rozważmy następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 3x = f(x)$$

gdzie $f(x)$ jest wejściem i funkcją zmiennej wyjściowej x. Przyjmij, że $f(x) = \sin(x)$ i dokonaj linearyzacji równania różniczkowego dla małych odchyłek, zakładając, że:

(a) $x = 0$

(b) $x = \pi$

10. Rozważ następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 10\frac{d^2x}{dt^2} + 31\frac{dx}{dt} + 30x = f(x)$$

gdzie $f(x)$ jest wejściem i funkcją zmiennej wyjściowej x. Przyjmij, że $f(x) = e^{-x}$ i dokonaj linearyzacji równania różniczkowego dla x w pobliżu 0.

11. Ucho wewnętrzne człowieka zbudowane jest z zestawu prawie prostopadłych do siebie półkolistych kanałów wypełnionych płynem. Przetworniki podłączone do cebulek włosowych odchylają się w zależności do ruchu czaszki człowieka i stanowią sensory położenia (czyli pozwalają utrzymywać odczucie kierunku i równowagi), które połączone są do kanałów ucha wewnętrznego. Gdy czaszka się odchyla to wtedy następuje odchylenie się wodoodpornej klapki czyli tzw. osklepeka (ang. cupula). Zostało pokazane, że relacja pomiędzy położeniem czaszki a ruchem osklepka opisane jest następującym równaniem

$$J\ddot{\phi} + b\dot{\phi} + k\phi = (aJ)\ddot{\psi}$$

gdzie

J - moment bezwładności płynu w kanale.

b - moment obrotowy na jednostkę względnej prędkości kątowej

k - moment obrotowy na jednostkę względnego przesunięcia kątowego

a - stała wartość

$\phi(t)$ - odchylenie kątowe osklepka (sygnał wyjściowy)

$\ddot{\psi}(t)$ - przyspieszenie kątowe czaszki (sygnał wejściowy)

Wyznacz transmitancje

$$\frac{\Phi(s)}{\ddot{\Psi}(s)}$$

12. Cukrzyca jest chorobą, która dotyka coraz większą liczbę osób, stając się niemal epidemią i dotyka prawie 3% ogólnoświatowej populacji ludzkości. Równanie różniczkowe, które modeluje dynamikę przyrostu liczby cukrzyków na poniższą postać

$$\begin{aligned}\frac{dC(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu + \delta + \gamma + \nu)C(t) + \lambda N(t)\\ \frac{dN(t)}{dt} &= -(\nu + \delta)C(t) - \mu N(t) + I(t)\end{aligned}$$

gdzie warunki początkowe to $C(0) = 0$ i $N(0) = N_0$ oraz

$I(t)$ - liczba nowych przypadków zachowań na cukrzycę (sygnał wejściowy)

$C(t)$ - liczba chorych na cukrzycę z powikłaniami

$N(t)$ - całkowita liczba chorych na cukrzycę bez i z powikłaniami (sygnał wyjściowy)

μ - współczynnik śmiertelności naturalnej

λ - prawdopodobieństwo pojawienia się komplikacji podczas choroby

δ - współczynnik śmiertelności w następstwie komplikacji podczas choroby

ν - współczynnik przy którym pacjenci z powikłaniami stają się poważnie upośledzeni (nieuleczalnie)

γ - współczynnik wyleczonych komplikacji

Przyjmij następujące wartości parametrów: $\nu = \delta = 0.05$/rok. $\mu = 0.02$/rok, $\gamma = 0.08$/rok, $\lambda = 0.7$ oraz warunki początkowe $C_0 = 47000500$ i $N_0 = 61100500$. Równoczesne przyjmij $I = 6 \cdot 10^6$.

(a) Narysuj schemat blokowy układu, gdzie zaznaczone będzie: wejście ($I(s)$), wyjście ($N(s)$), transmitancja (wyznaczona analitycznie) oraz warunki początkowe.

(b) Zastosuj dowolną metodę w celu wyznaczenia analitycznego wyrażenia na $N(t)$ dla $t \geq 0$.

Przyjmując

13. W układzie lewitacji magnetycznej, element metalowy jest utrzymywany w powietrzu poniżej elektromagnesu. Odległość pomiędzy elementem metalowym a elektromagnesem jest opisana poniższym nieliniowym równaniem różniczkowym

$$m\frac{d^2H}{dt^2} = mg - k\frac{I^2}{H^2}$$

gdzie

m - masa elementu metalowego

g - przyspieszenie ziemskie

k - stała o wartości nieujemnej

H - odległość pomiędzy elementem metalowym a elektromagnesem (sygnał wyjściowy)

I - natężenie prądu elektromagnesu (sygnał wejściowy)

(a) Pokaż, że punkt równowagi układu jest osiągnięty gdy

$$H_0 = I_0\sqrt{\frac{k}{mg}}$$

(b) Dokonaj linearyzacji równania wokół punktu równowagi wyznaczonym powyżej. Wykaż, że otrzymana w ten sposób liniowa transmitancja będzie wyrażona jako

$$\frac{\delta H(s)}{\delta I(s)} = -\frac{a}{s^2 - b^2}$$

gdzie $a > 0$.
Wskazówka: Aby dokonać linearyzacji, zdefiniuj

$$\begin{aligned}\delta H =& H(t) - H_0 \\ \delta I =& I(t) - I_0\end{aligned}$$

a następnie podstaw $H(t)$ i $I(t)$ do oryginalnego równania. Dzięki temu otrzymasz

$$m\frac{d^2(H_0 + \delta H)}{dt^2} = mg - k\frac{(I_0 + \delta I)^2}{(H_0 + \delta H)^2} = \gamma$$

Teraz wyznacz rozwinięcie w szereg Taylor'a z przybliżeniem pierwszego rzędu, tzn. oblicz

$$m\frac{d^2\delta H}{dt^2} = \left.\frac{\partial\gamma}{\partial\delta H}\right|_{\delta H=0,\delta I=0}\delta H + \left.\frac{\partial\gamma}{\partial\delta I}\right|_{\delta H=0,\delta I=0}$$