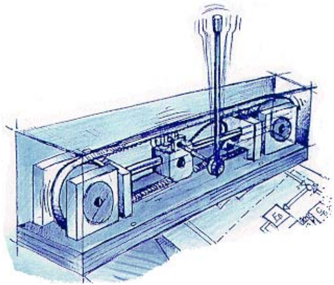
Automatyka i robotyka

Wykład 2 - Modelowanie w dziedzinie częstotliwości



Wojciech Paszke

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych,
Uniwersytet Zielonogórski

Plan wykładu

Transformata Laplace'a

Modele układów elektrycznych i mechanicznych

Linearyzacja modeli nieliniowych

Plan wykładu

Transformata Laplace'a

Modele układów elektrycznych i mechanicznych

Linearyzacja modeli nieliniowych

Plan wykładu

Transformata Laplace'a

Modele układów elektrycznych i mechanicznych

Linearyzacja modeli nieliniowych

Modelowanie dynamiki procesu

3 alternatywne podejścia:

1. Dziedzina czasu - równania różniczkowe
2. Transformata Laplace'a (transmitancja, dziedzina s)
3. Reprezentacja w przestrzeni stanów

Podejścia 2 i 3 stanowią dwa podstawowe podejścia do analizowania i projektowania układów regulacji.

Transformata Laplace'a

Przekształca sygnał z dziedziny czasu do dziedziny zmiennych zespolonych (dziedzina-s)

$$f(t) \overbrace{\longrightarrow}^{\mathscr{L}} F(s)$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Transformata Laplace'a posiada wiele użytecznych właściwości

Transformata Laplace'a

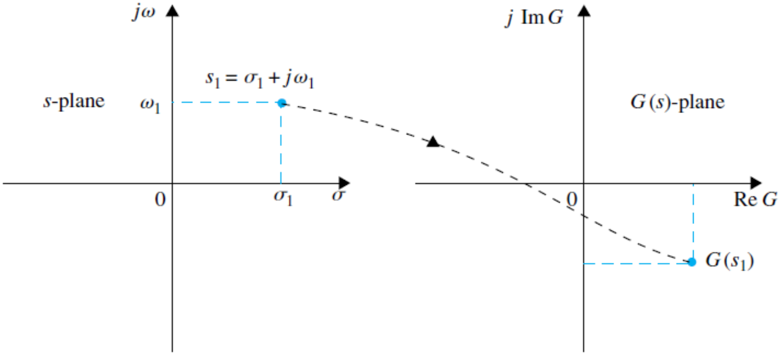
Znaczenie operatora s

- dziedzina czasu $s = \frac{d}{dt}$
- dziedzina częstotliwości $s = \sigma + j\omega$
  - $\sigma \rightarrow e^{\sigma t}$
  - $\omega = 2\pi f$

Rozważamy tylko sygnały w stanie ustalonym $\sigma = 0$ i dlatego $s = j2\pi f$. Oznacza to, że wszystkie funkcje zmiennej s możemy wyznaczyć przyjmując $s = j2\pi f$ (odpowiedź częstotliwościowa).

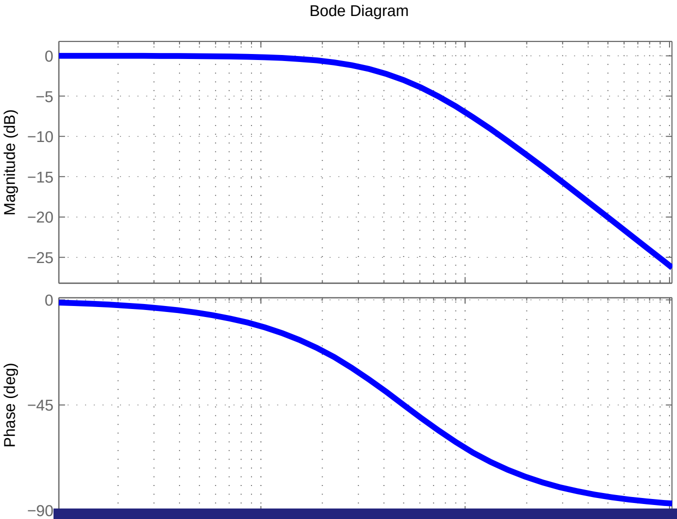
Transformata Laplace'a

Przekształcenie $G(s)|_{s=j\omega} \mapsto G(j\omega)$



$G(j\omega) = Real(G(j\omega)) + jImag(G(j\omega))$

Transformata Laplace'a



Transformata Laplace'a

$G(j\omega) = \sqrt{Real(G(j\omega))^2 + Imag(G(j\omega))^2} e^{jArg(Gj\omega)}$, dla $\omega \in \mathbb{R}$
Własności ($\omega = 2\pi f$):

- przesuniecie fazowe (faza): Arg($G(j\omega)$)$=-360 * f * \Delta t^o$ - Δt to opóźnienie
- wzmocnienie $20\log_{10}(\sqrt{Real(G(j\omega))^2 + Imag(G(j\omega))^2})$
- wzmocnienie w stanie ustalonym, tj. gdy $s = 0$ lub $t \to \infty$

Funkcje MATLAB'a: `bode`, `abs`, `angle`, `dcgain`.

Transformata Laplace'a funkcji czasu ciągłego

Problem: Znajdź transformate Laplace'a funkcji

$$f(t) = Ae^{-at}u(t)$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} F(s) = & \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt \\ = & A\int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt = -\frac{A}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{A}{s+a} \end{aligned}$$

Podstawowe transformaty Laplace'a

Lp	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^n+1}$
5	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6	$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Transformaty podstawowych elementów

Mechanika - (V - prędkość, F - siła)

Element	$F(s)$	$f(t)$
Sprężyna (K)	$V(s) = \frac{s}{K} F(s)$	$v(t) = \frac{1}{K} \frac{df(t)}{dt}$
Masa (M)	$V(s) = \frac{1}{M} \frac{F(s)}{s}$	$v(t) = v_0 + \frac{1}{M} \int f(t) dt$
Tłumik (c)	$V(s) = \frac{F(s)}{c}$	$v(t) = \frac{f(t)}{c}$

Elektrotechnika - (E - napięcie, I - prąd)

Element	$F(s)$	$f(t)$
Cewka (L)	$V(s) = \frac{s}{K} F(s)$	$v(t) = \frac{1}{K} \frac{df(t)}{dt}$
Kondensator (C)	$V(s) = \frac{1}{M} \frac{F(s)}{s}$	$v(t) = v_0 + \frac{1}{M} \int f(t) dt$
Rezystor(R)	$E(s) = RI(s)$	$e(t) = Ri(t)$

Własności transformaty Laplace'a

Różniczkowanie: $f^{(n)}(t) \longrightarrow s^n F(s)$

Zastąpienie manipulowaniem liniowymi równaniami różniczkowymi

$$b_m y^{(m)}(t)+b_{m-1}y^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1 y^1(t)+b_0 y(t) =$$
$$a_n u^n(t)+a_{n-1}u^{n-1}(t)+\ldots+a_1 u^1(t)+a_0 u(t)$$

liniowymi równaniami algebraicznymi

$$\left(b_m s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0\right) Y(s) =$$
$$\left(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0\right) U(s)$$

Własności transformaty Laplace'a

Lp	Twierdzenie	Nazwa
1	$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definicja transformaty
2	$\mathscr{L}[kf(t)] = kF(s)$	Liniowość
3	$\mathscr{L}[f_1(t)+f_2(t)] = F_1(s)+F_2(s)$	Liniowość
4	$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$	Przesunięcie w dziedzinie czest.
5	$\mathscr{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s+a)$	Przesunięcie w dziedzinie czasu
6	$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$	Skalowanie
7	$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$	Różniczkowanie
8	$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Różniczkowanie
9	$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Różniczkowanie
10	$\mathscr{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	Całkowanie
11	$f(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$	Twierdzenie o war. końcowej
12	$f(0+) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$	Twierdzenie o war. początkowej

Odwrotna transformata Laplace'a

Wyznaczenie $f(t)$ na podstawie $F(s)$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds = f(t)u(t)$$

gdzie

$$\begin{aligned} u(t) =& 1 \text{ dla } t \ \ 0 \\ u(t) =& 0 \text{ dla } t < 0 \end{aligned}$$

Odwrotna transformata Laplace'a funkcji

Problem: Znajdź odwrotną transformatę Laplace'a funkcji

$$F_1(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$$

Rozwiązanie:

1. Zastosuj przesunięcie w dziedzinie częstotliwości i transformatę sygnału $f(t) = tu(t)$
2. Zauważ, że

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F(s) = \frac{1}{s^2}\right] = tu(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F(s+a) = \frac{1}{(s+a)^2}\right] = e^{-at}tu(t)$$

Wynik: $f_1(t) = e^{-3t}tu(t)$

Rozkład na ułamki proste

Problem: Wyznacz odwrotną transformatę Laplace'a skomplikowanej funkcji $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$.

Rozwiązanie: Dokonaj rozkładu funkcji $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ na sumę wyrazów, których transformata jest nam znana - metoda rozkładu na ułamki proste.

Mamy dwa ogólne przypadki:

- stopień $(N(s)) >$ stopień $(D(s))$ - musimy wykonać dzielenie wielomianów
- stopień $(N(s))$ stopień $(D(s))$ - od razu stosujemy metodę rozkładu na ułamki proste

Rozkład na ułamki proste

Przykład: Znajdź odwrotną transformatę Laplace'a funkcji (dwa różne rzeczywiste pierwiastki)

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Możemy $F(s)$ zapisać jako

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

Aby znaleźć K_1 mnożymy powyższe równanie przez $(s+1)$ - izolujemy K_1

$$\frac{2}{(s+2)} = K_1 + \frac{K_2(s+1)}{(s+2)}$$

Rozkład na ułamki proste

Jeśli $s \to -1$ wtedy eliminujemy ostatni wyraz i $K_1 = 2$. W podobny sposób izolujemy K_2

$$\frac{2}{(s+1)} = K_2 + \frac{K_1(s+2)}{(s+1)}$$

i uzyskujemy $K_2 = -2$ (dla $s \to -2$).
Ostatecznie korzystając z tabeli transformat uzyskujemy

$$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$

Rozkład na ułamki proste

Uogólniając, dla

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)\cdots(s+p_n)}$$
$$= \frac{K_1}{(s+p_1)} + \frac{K_2}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{K_m}{(s+p_m)} + \cdots + \frac{K_n}{(s+p_n)}$$

Aby wyznaczyć K_m wykonujemy mnożenie przez $(s+p_m)$

$$(s+p_m)F(s) = \frac{(s+p_m)N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)\cdots(s+p_n)}$$
$$= \frac{(s+p_m)K_1}{(s+p_1)} + \frac{(s+p_m)K_2}{(s+p_2)} + \cdots + K_m + \cdots + \frac{(s+p_m)K_n}{(s+p_n)}$$

Rozkład na ułamki proste

Teraz dla $s \to -p_m$ otrzymujemy

$$\left.\frac{(s+p_m)N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)\cdots(s+p_n)}\right|_{s\to -p_m} = K_m$$

Ostatecznie korzystamy z tabeli transformat aby wyznaczyć oryginał funkcji czyli $f(t)$

Rozwiązywanie równań różniczkowych

Zadanie: Rozwiąż poniższe równanie różniczkowe dla zerowych warunków początkowych. Zastosuj transformatę Laplace'a.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 32y = 32u(t)$$

Rozwiązanie: Podstaw odpowiednie transformaty za kolejne wyrazy powyższego równania, przyjmując, że $y(0-) = 0$ i $\dot{y}(0-) = 0$. W rezultacie otrzymamy

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

Rozwiązywanie równań różniczkowych

Wyznaczamy $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2+12s+32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Aby wyznaczyć $f(t)$ musimy dokonać rozkładu na ułamki proste

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+4)} + \frac{K_3}{(s+8)}$$

Rozwiązywanie równań różniczkowych

Wyznaczamy współczynniki K_1, K_2, K_3

$$K_1 = \left.\frac{32}{(s+4)(s+8)}\right|_{s\to 0} = 1$$

$$K_2 = \left.\frac{32}{s(s+8)}\right|_{s\to -4} = -2$$

$$K_3 = \left.\frac{32}{s(s+4)}\right|_{s\to -8} = 1$$

Rozwiązywanie równań różniczkowych

Ostatecznie

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+2)} + \frac{1}{(s+8)}$$

Korzystając z tabeli transformat otrzymujemy

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t})u(t)$$

Rozkład na ułamki proste

Problem: Znajdź odwrotną transformatę Laplace'a funkcji (wielokrotne rzeczywiste pierwiastki)

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

Wtedy $F(s)$ musimy zapisać jako

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

K_1 wyznaczamy dokładnie tak samo jak poprzednio ($K_1 = 2$). Aby otrzymać K_2 musimy je izolować

$$\frac{2}{(s+1)} = \frac{K_1(s+2)^2}{(s+1)} + K_2 + (s+2)K_3$$

Dla $s \to -2$ otrzymujemy $K_2 = -2$.

Rozkład na ułamki proste

Aby wyznaczyć K_3 musimy zróżniczkować poprzednie równanie, otrzymując

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{K_1(s+2)s}{(s+1)^2} + K_2 + K_3$$

Teraz K_3 może być wyznaczone dla $s \to -2$: $K_3 = -2$.
Ostatecznie, korzystając z tabeli transformat uzyskujemy

$$f(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

Rozkład na ułamki proste

Uogólniając, dla

$$
\begin{aligned}
F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} &= \frac{N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\
&= \frac{K_1}{(s+p_1)^r} + \frac{K_2}{(s+p_1)^{r-1}} + \frac{K_r}{(s+p_1)^r} + \frac{K_{r+1}}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{K_n}{(s+p_n)}
\end{aligned}
$$

Aby wyznaczyć K_1 wykonujemy mnożenie przez $(s+p_m)^1$ i $s \to -p_1$.
Wyznaczenie współczynników od K_2 do K_r wymaga różniczkowania

$$
K_i = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}F(s)}{ds^{i-1}}\bigg|_{s\to -p_i}, i = 1, 2, \ldots, r;\ \ 0! = 1
$$

Rozkład na ułamki proste

Problem: Znajdź odwrotną transformatę Laplace'a funkcji (pierwiastki zespolone)

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

Wtedy $F(s)$ możemy zapisać jako

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

K_1 wyznaczamy dokładnie tak samo jak poprzednio ($K_1 = \frac{3}{5}$). K_2 i K_3 mogą być znalezione poprzez przemnożenie ostatniego równania przez $s(s^2+2s+5)$ i dla ($K_1 = \frac{3}{5}$)

$$3 = (K_2 + \frac{3}{5})s^2 + (K_3 + \frac{6}{5})s + 3$$

Rozkład na ułamki proste

Porównując współczynniki otrzymujemy $K_2 = -\frac{3}{5}$ i $K_3 = -\frac{6}{5}$, gdyż

$$(K_2 + \frac{3}{5}) = 0 \;\; i \;\; (K_3 + \frac{6}{5}) = 0$$

Dlatego

$$F(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+5)} = \frac{\frac{3}{5}}{s} - \frac{3}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

Na postawie tabeli transformat mamy

$$\mathscr{L}[Ae^{-at}\cos(\omega t)] = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}, \; \mathscr{L}[Be^{-at}\sin(\omega t)] = \frac{B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Rozkład na ułamki proste

Dlatego

$$\mathscr{L}[Ae^{-at}\cos(\omega t)+Be^{-at}\sin(\omega t)] = \frac{A(s+a)+B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

oraz

$$F(s) = \frac{\frac{3}{5}}{s} - \frac{3}{5}\frac{(s+1)+(0.5)(2)}{(s+1)^2+2^2}$$

Ostatecznie

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

Rozkład na ułamki proste

Rozwiązanie w MATLAB'ie

```
syms s;
f=ilaplace(3/(s*(s^2+2*s+5)));
pretty(f)
```

Przydatne wyrażenia

$$\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}=\cos\theta;\quad \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}=\sin\theta$$

Transmitancja

$$\left(b_m s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right) Y(s) =$$
$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right) U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \ldots \text{transmitancja}$$

Transmitancja

Własności

- Transmitancja to matematyczny model układu - postać operatorowa równania różniczkowego reprezentującego relację wyjścia do wejścia układu
- Transmitancja jest niezależna od sygnału pobudzającego (sterującego)
- Transmitancja nie odwzorowuje fizycznej struktury układu (wiele układów - jedna transmitancja).
- Jeśli transmitancja jest znana to możemy analizować odpowiedzi układu na zadane pobudzenia (sterowania).
- Jeśli nie znamy transmitancji to możemy ją ekperymentalnie wyznaczyć poprzez pobudzanie układu znanymi sygnałami i analizowaniem odpowiedzi na te sygnały.

Transmitancja

Własności

- Splot

$$Y(s)=G(s)U(s) \Leftrightarrow y(t)=\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

gdzie dla $t<0$ $g(t)=0, u(t)=0$

- Odpowiedź impulsowa (dla $U(s)=1$)

$$Y(s)=G(s) \Leftrightarrow y(t)=g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)],$$

Odpowiedź układu na podstawie transmitancji

Problem: Wyznacz odpowiedź układu $G(s) = \frac{1}{s+2}$ na pobudzenie skokiem jednostkowym ($r(t) = 1$ dla zerowych warunków poczatkowych).
Rozwiązanie:

- Transformata syg. wej. $R(s) = \frac{1}{s}$
- Wyjście układu $Y(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+2}$

Ostatecznie

$$y(t) = 0.5 - 0.5e^{-2t}$$

Odpowiedź układu na podstawie transmitancji

- Wyznaczenie odwrotnej transformaty Laplace'a
```
syms s;
Y=1/(s*(s+2));
Y=ilaplace(Y)
```
- Wyznaczenie charakterystyki
```
t=0:0.01:1;
plot(t,0.5-0.5*exp(-2*t));
```

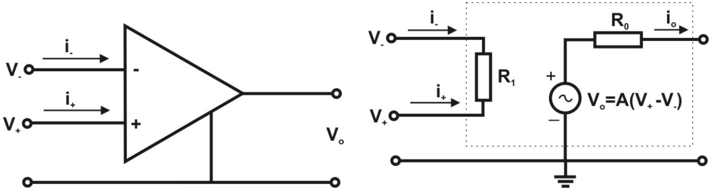
Modele układów elektrycznych

Impedancje elementów elektrycznych

Element	Dz. czasu	Tr. Laplace	Impednacja
Rezystor	$V(t) = RI(t)$	$V(s) = RI(s)$	$Z = R$
Kondensator	$V(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt$	$V(s) = \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s}$	$Z = \frac{1}{sC}$
Cewka	$V(t) = L\frac{d}{dt}I(t)$	$V(s) = LsI(s)$	$Z = sL$

Modele układów elektrycznych

Wzmacniacz operacyjny

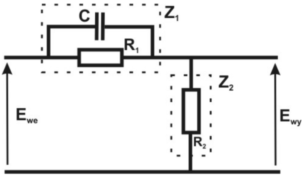


Idealny wzmacniacz operacyjny

- $R_1 = \infty,\ R_0 = 0$ i $A = \infty$
- $i_+ = i_- = 0$
- $v_+ - v_- = 0$

Modele układów elektrycznych

Układy RLC



$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 Cs + 1}, Z_2 = R_2$$

Transmitancja, pomiędzy E_{wy} a E_{we}

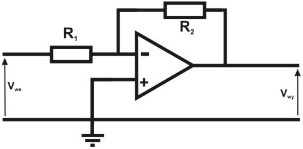
$$\frac{E_{wy}}{E_{we}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1 Cs + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cs + 1}$$

Jeśli, $R_1 C = T$ i $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \alpha$ to

$$\frac{E_{wy}}{E_{we}} = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

Modele układów elektrycznych

Układy ze wzmacniaczem operacyjnym



$$\frac{V_- - V_{we}}{R_1} + \frac{V_- - V_{wy}}{R_2} = 0$$

czyli

$$\frac{0 - V_{we}}{R_1} + \frac{0 - V_{wy}}{R_2} = 0$$

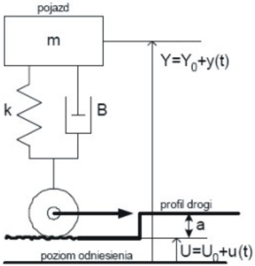
oraz

$$V_{wy} = \frac{-R_2 V_{we}}{R_1}$$

Transmitancja, pomiędzy V_{wy} a V_{we}

$$\frac{-R_2}{R_1}$$

Modele układów mechanicznych



- m - masa pojazdu
- k - współczynnik sprężystości zawieszenia
- B - prędkościowy współczynnik zawieszenia

Suma sił w układzie

$$m\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+B\left(\frac{dY(t)}{dt}-\frac{dU(t)}{dt}\right)+k(Y(t)-U(t))=mg$$

W stanie ustalonym

- położenie drogi $U_0 = \mathrm{const}$,
- położenie zawieszenia $Y_0 = \mathrm{const}$,
- brak zmian oznacza, że pochodne $= 0$.

Modele układów mechanicznych

W stanie ustalonym

$$k(Y_0 - U_0) = mg$$

Przyjmujemy, że

- $Y = Y_0 + y(t)$
- $U = U_0 + u(t)$

Ostatecznie, równanie dynamiki układu to

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = B\frac{du(t)}{dt} + ku(t)$$

Modele układów mechanicznych

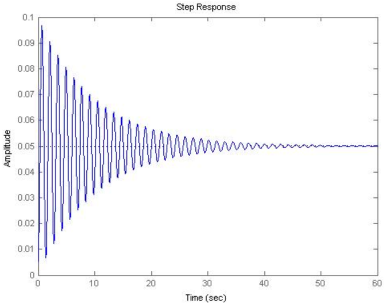
Stosując przekształcenie Laplace'a, otrzymujemy

$$(ms^2 + Bs + k)Y(s) = (Bs + k)U(s)$$

czyli transmitancja to

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Bs + k}{ms^2 + Bs + k}$$

Modele układów mechanicznych



Przykładowe dane

- m =1000 [kg]
- B=200[Ns/m]
- k=20000[N/m]
- a=0.05 -zmiana profilu drogi o 5 cm

Układy liniowe i nieliniowe

Podstawowe własności układów liniowych

1. Superpozycja

$$r_1(t) + r_2(t) \rightarrow c_1(t) + c_2(t)$$

2. Jednorodność

$$Ar_1 \rightarrow Ac_1$$

Nieliniowość jest skutkiem

- nasycenia
- występowania martwych stref
- luzów

Linearyzacja układów nielinowych

Punkt równowagi układu

Rozważmy obiekt opisany następującym równaniem różniczkowym

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = f\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}, u(t), \frac{du(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^m u(t)}{dt^m}\right) \quad (1)$$

Definicja 1. Punkt równowagi

Punktem równowagi systemu (1) nazywamy jego rozwiązanie dla stałej wartości wymuszenia $u(t)$

- Dla systemu liniowego (funkcja $f(\cdot)$ – liniowa) istnieje dokładnie jeden punkt równowagi systemu (1)

Rozważmy obiekt opisany następującym równaniem różniczkowym

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = f\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}, u(t), \frac{du(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^m u(t)}{dt^m}\right) \quad (1)$$

Definicja 1. Punkt równowagi

Punktem równowagi systemu (1) nazywamy jego rozwiązanie dla stałej wartości wymuszenia $u(t)$

- Dla systemu liniowego (funkcja $f(\cdot)$ – liniowa) istnieje dokładnie jeden punkt równowagi systemu (1)
- Dla systemu nieliniowego (funkcja $f(\cdot)$ – nieliniowa) może istnieć w ogólności wiele punktów równowagi systemu

Linearyzacja układów nielinowych

Punkt równowagi układu

Rozważmy obiekt opisany następującym równaniem różniczkowym

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = f\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}, u(t), \frac{du(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^m u(t)}{dt^m}\right) \quad (1)$$

Definicja 1. Punkt równowagi

Punktem równowagi systemu (1) nazywamy jego rozwiązanie dla stałej wartości wymuszenia $u(t)$

- Dla systemu liniowego (funkcja $f(\cdot)$ – liniowa) istnieje dokładnie jeden punkt równowagi systemu (1)
- Dla systemu nieliniowego (funkcja $f(\cdot)$ – nieliniowa) może istnieć w ogólności wiele punktów równowagi systemu
- Jeśli system jest stabilny to zawsze będzie dążył do wyznaczonego punktu równowagi, niezależnie od warunków początkowych

Linearyzacja układów nielinowych

Punkt równowagi układu

Charakterystyki czasowe systemu (skokowa, impulsowa) są chrakterystykami dynamicznymi

Charakterystyki czasowe systemu (skokowa, impulsowa) są chrakterystykami dynamicznymi

Definicja 2. Charakterystyka statyczna

Charakterystyka statyczna – charakterystyka pokazująca na zależność sygnału wyjściowego od sygnału wejściowego w stanie ustalonym (punkcie równowagi), teoretycznie po upłunięciu nieskończenie długiego czasu

Linearyzacja układów nielinowych

Punkt równowagi układu

Charakterystyki czasowe systemu (skokowa, impulsowa) są chrakterystykami dynamicznymi

Definicja 2. Charakterystyka statyczna

Charakterystyka statyczna – charakterystyka pokazująca na zależność sygnału wyjściowego od sygnału wejściowego w stanie ustalonym (punkcie równowagi), teoretycznie po upłunięciu nieskończenie długiego czasu

- Dla układów liniowych charakterystyka statyczna jest linią prostą

Charakterystyki czasowe systemu (skokowa, impulsowa) są chrakterystykami dynamicznymi

Definicja 2. Charakterystyka statyczna

Charakterystyka statyczna – charakterystyka pokazująca na zależność sygnału wyjściowego od sygnału wejściowego w stanie ustalonym (punkcie równowagi), teoretycznie po upłunięciu nieskończenie długiego czasu

- Dla układów liniowych charakterystyka statyczna jest linią prostą
- Dla układów nieliniowych zależność sygnału wejściowego od sygnału wejściowego w stanie ustalonym ma postać funkcji nieliniowej

Linearyzacja układów nielinowych

Punkt równowagi układu

Charakterystykę statyczną otrzymuje się poprzez przyrównanie wszystkich różniczek w (1) do zera

$$\frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0, \text{dla } i = 1, \ldots, n \quad \frac{d^j u(t)}{dt^j} = 0, \text{dla } j = 1, \ldots, m$$

Linearyzacja układów nielinowych

Punkt równowagi układu

Charakterystykę statyczną otrzymuje się poprzez przyrównanie wszystkich różniczek w (1) do zera

$$\frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0, \text{dla } i = 1, \ldots, n \quad \frac{d^j u(t)}{dt^j} = 0, \text{dla } j = 1, \ldots, m$$

Przykład 1.

Dla układu opisanego równaniem różniczkowym

$$a(y)\frac{dy(t)}{dt} = y(t) - b\sqrt{x(t)}$$

wyznaczyć jego charakterystykę statyczną

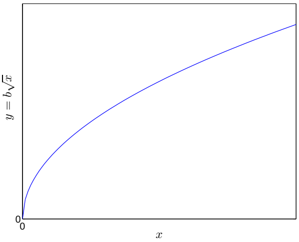
Linearyzacja układów nielinowych

Jest to nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Nieliniowość spowodowana jest przez dwa czynniki:

- zależność współczynnika a od zmiennej $y(t)$,
- występowanie pierwiastka zmiennej $x(t)$

Podstawiamy $\dfrac{dy(t)}{dt} = 0$ do równania opisującego system i otrzymujemy

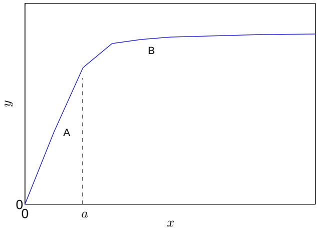
$$0 = y - b\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y = b\sqrt{x}$$



Linearyzacja układów nielinowych

Linearyzacja statyczna

- Wiele układów fizycznych ma charakterystykę statyczną w której można wyróżnić zakres liniowy (A) i zakres nasycenia (B)



- Jeżeli podczas analizy zawęzimy zakres sygnału wejściowego do wartości *a* to układ można traktować jako liniowy (zakres A)
- Punkt pracy systemu zlinearyzowanego to $(0, 0)$
- W ogólności punkt pracy jest zdeterminowany przez punkt określający początek zakresu liniowego – potrzeba przesunięcia środka układu współrzędnych

Linearyzacja układów nielinowych

Linearyzacja statyczna metodą stycznej

- W wielu przypadkach nieliniowość dotyczy części statycznej opisu matematycznego
- Jeżeli opis jest różniczkowalny to linearyzację można przeprowadzić rozwijając część statyczną w szereg Taylora
- Modele uproszczone w ten sposób są stosowane do pracy w otoczeniu punktu pracy
- Aby zachować przyjętą dokładność modelu przy rozszerzaniu obszaru pracy należy zmieniać punkt linearyzacji wraz ze zmianą punktu pracy
- Ze względu na interpretację geometryczną metoda nazywa się linearyzacją za pomocą stycznej

Linearyzacja układów nielinowych

Przykład 2

Dokonać linearyzacji statycznej układu opisanego równaniem różniczkowym

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) - 2\sqrt{x(t)}$$

w punkcie pracy $(x_0, y_0) = (1, 2)$ metodą stycznej

Linearyzacja układów nielinowych

Przykład 2

Dokonać linearyzacji statycznej układu opisanego równaniem różniczkowym

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) - 2\sqrt{x(t)}$$

w punkcie pracy $(x_0, y_0) = (1, 2)$ metodą stycznej

Charakterystyka statyczna: $y = 2\sqrt{x}$

Linearyzacja układów nielinowych

Przykład 2

Dokonać linearyzacji statycznej układu opisanego równaniem różniczkowym

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) - 2\sqrt{x(t)}$$

w punkcie pracy $(x_0, y_0) = (1, 2)$ metodą stycznej

Charakterystyka statyczna: $y = 2\sqrt{x}$

Pochodna w punkcie x_0 (współczynnik nachylenia stycznej)

$$y'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} = 1$$

Linearyzacja układów nielinowych

Przykład 2

Dokonać linearyzacji statycznej układu opisanego równaniem różniczkowym

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) - 2\sqrt{x(t)}$$

w punkcie pracy $(x_0, y_0) = (1, 2)$ metodą stycznej

Charakterystyka statyczna: $y = 2\sqrt{x}$

Pochodna w punkcie x_0 (współczynnik nachylenia stycznej)

$$y'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} = 1$$

Punkt przecięcia z osią rzędnych (z równania prostej)

$$y_0 - y'(x_0)x_0 = 2 - 1 \cdot 1 = 1$$

Linearyzacja układów nielinowych

Przykład 2

Dokonać linearyzacji statycznej układu opisanego równaniem różniczkowym

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) - 2\sqrt{x(t)}$$

w punkcie pracy $(x_0, y_0) = (1,2)$ metodą stycznej

Charakterystyka statyczna: $y = 2\sqrt{x}$

Pochodna w punkcie x_0 (współczynnik nachylenia stycznej)

$$y'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} = 1$$

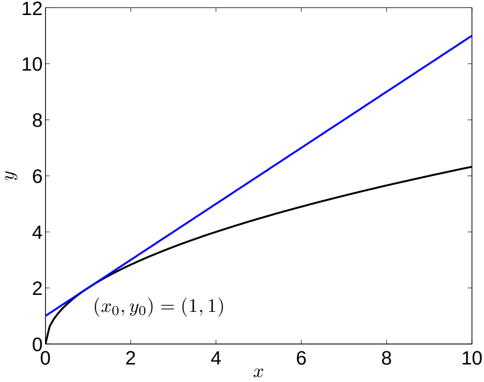
Punkt przecięcia z osią rzędnych (z równania prostej)

$$y_0 - y'(x_0)x_0 = 2 - 1 \cdot 1 = 1$$

Równanie zlinearyzowane w punkcie (1,2): $y = x + 1$

Linearyzacja układów nielinowych

Interpretacja geometryczna



Linearyzacja układów nielinowych

Linearyzacja dynamiczna

Linearyzacja (budowa liniowego modelu układu) jest możliwa w pewnym niewielkim otoczeniu ustalonego punktu pracy układu nieliniowego.

- Podstawą teoretyczna: rozwinięcie funkcji nieliniowej w szereg potęgowy Taylora w otoczenia danego punktu ($\overline{x}$). Dla funkcji jednej zmiennej ma on postać

$$y = f(x) = f(\overline{x}) + \frac{df}{dx}(x - \overline{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x - \overline{x})^2 + \dots$$

gdzie pochodne $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$ są obliczane w punkcie $x = \overline{x}$

Linearyzacja układów nielinowych

- Jeżeli wartości $x-\overline{x}$ są małe to możemy zaniedbać wyrazy wyższego rzędu. Wtedy możemy zapisać

$$y=\overline{y}+K(x-\overline{x})$$

gdzie

$$\overline{y}=f(\overline{x}); \quad K=\frac{df}{dx}\Bigg\|_{x=\overline{x}}$$

- Oczywistym jest teraz, że

$$y-\overline{y}=K(x-\overline{x})$$

czyli $y-\overline{y}$ jest proporcjonalne do $x-\overline{x}$ (liniowa zależność).

Linearyzacja układów nielinowych

- W przypadku kiedy wyjście (y) układu nieliniowego jest funkcją dwóch wejść (x_1, x_2), czyli

$$y = f(x_1, x_2)$$

- Rozwinięcie w szereg Taylor'a

$$y = f(\overline{x}_1, \overline{x}_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2)\right]$$

- Rezultat

$$y - \overline{y} = K_1(x_1 - \overline{x}_1) + K_2(x_2 - \overline{x}_2)$$

gdzie

$$K_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1=\overline{x}_1, x_2=\overline{x}_2}, K_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1=\overline{x}_1, x_2=\overline{x}_2}$$

czyli $y - \overline{y}$ jest proporcjonalne do $x_1 - \overline{x}_1$ i $x_2 - \overline{x}_2$ (liniowa zależność).

Linearyzacja nielinowych modeli matematycznych

Przykład

Dokonaj linearyzacji następującego układu nieliniowego

$$z = xy$$

gdzie 5 x 7, 10 y 12. Oblicz błąd linearyzacji gdy $x = 5$, $y = 10$.

Rozwiązanie:

1. Dla 5 x 7, 10 y 12 wybieramy $\overline{x} = 6$ i $\overline{y} = 11$ (czyli $\overline{z} = \overline{xy} = 66$).
2. Rozwijając równanie $z = xy$ w szereg Taylor'a w sąsiedztwie punktu $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$ i pomijając wyrazy wyższego rzędu otrzymujemy

$$z - \overline{z} = a(z - \overline{z}) + b(y - \overline{y})$$

Linearyzacja nielinowych modeli matematycznych

Przykład

3. Obliczamy

$$a = \frac{\partial(xy)}{\partial x}\bigg\|_{x=\overline{x},y=\overline{y}} = \overline{y} = 11$$

$$b = \frac{\partial(xy)}{\partial y}\bigg\|_{x=\overline{x},y=\overline{y}} = \overline{x} = 6$$

4. Czyli liniowa postać równania to

$$z - 66 = 11(x-6) + 6(y-11) \Leftrightarrow z = 11x + 6y - 66$$

5. Dla $x = 5$, $y = 10$, wartość wyznaczona z równania liniowego to

$$z = 11x + 6x - 66 = 55 + 60 - 66 = 49$$

   a wartość dokładna to $z = 5 * 10 = 50$.

6. Błąd bezwzględny $50 - 49 = 1$, błąd względny 2%

Linearyzacja - przykład

Problem: Dokonaj linearyzacji $f(x) = 5\cos x$ w pobliżu $x = \pi/2$.
Rozwiązanie: Wyznaczamy pochodną $f(x)$ czyli

$$\frac{df}{dt} = -5\sin x$$

W punkcie $x = -\pi/2$ pochodna ma wartość $= -5$. Również

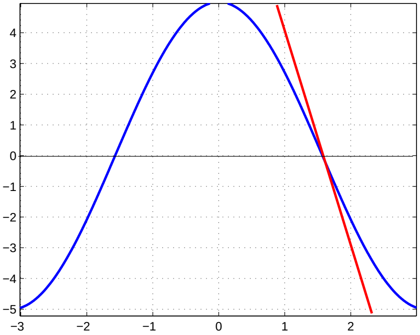
$$f(x_0) = f(\pi/2) = 5\cos(\pi/2) = 0$$

Teraz skorzystamy z

$$f(x) \approx f(x_0) + m_a(x + x_0) \approx f(x_0) + m_a\delta x$$

Linearyzacja - przykład

Ostatecznie, liniowa postać funkcji to $f(x) = -5\delta x$.



Linearyzacja równania różniczkowego

Problem: Dokonaj linearyzacji

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \cos x = 0$$

wokół $x = \pi/4$.
Rozwiązanie: Ponieważ linearyzujemy wokół $x = \pi/4$ to przyjmujemy $x = \delta x + \pi/4$, gdzie δx to małe odchylenie wokół $\pi/4$. Po podstawieniu otrzymujemy

$$\frac{d^2(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt^2} + 2\frac{d(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt} + \cos(\delta x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

Linearyzacja równania różniczkowego

Jednak

$$\frac{d^2(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt^2} = \frac{d^2\delta x}{dt^2}; \quad \frac{d(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}$$

Następnie wyznaczamy rozwinięcie $\cos(\delta x + \pi/4)$ w szereg Taylor'a, podstawiając $f(x) = \cos(\delta x + \pi/4)$, $f(x_0) = f(\pi/4) = cos(\pi/4)$ oraz $(x - x_0) = \delta x$ otrzymując

$$\cos(\delta x + \pi/4) - \cos(\pi/4) = \left.\frac{d\cos x}{dx}\right|_{x=\pi/4} \delta x = -\sin(\pi/4)\delta x$$

Linearyzacja równania różniczkowego

Rozwiązując dla $\cos(\delta x + (\pi/4))$ otrzymujemy

$$\cos(\delta x + \pi/4) = cos(\pi/4) - \sin(\pi/4)\delta x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x$$

Ostatecznie otrzymujemy liniowe równanie różniczkowe (niejednorodne)

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + 2\frac{d\delta x}{dt} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dziękuję bardzo za uwagę