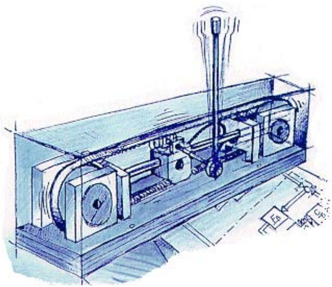
Automatyka i robotyka

Wykład 2 - Modelowanie w dziedzinie czasu



Wojciech Paszke

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych,
Uniwersytet Zielonogórski

Plan wykładu

Plan wykładu

Modele w przestrzeni stanów

Linearyzacja

Reprezentacja złożonego układu w przestrzeni stanów

Analiza układów i systemów

Plan wykładu

Plan wykładu

Modele w przestrzeni stanów

Wprowadzamy zmienną stanu $x(t)$ (wektor) w celu parametryzacji 'pamięci' układu

- Stan zawiera wszystkie informacje potrzebne do określenia przyszłego zachowania układu bez odniesienia się do pochodnych zmiennych wejściowych i wyjściowych.
- Wektor stanu jest często określany na podstawie fizycznych własności układów (odniesienie do energii układu)
- Rozmiar wektora stanu jest równoważny rzędowi układu

Modele układów liniowych w przestrzeni stanów

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

A - macierz systemowa ($n \times n$), B - macierz wejściowa ($n \times m$),
C - macierz wyjściowa ($p \times n$), D - macierz transmisji ($p \times m$)

Konwersja SS do TF

Rozważany układ to

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Stosując transformatę Laplace'a otrzymujemy

$$\begin{aligned}sX(s) &= AX(s) + BU(s)\\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Teraz wyznaczamy $X(s)$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \ \Rightarrow \ X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

i ostatecznie

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Wyznaczanie modeli stanowych

Znajdź model stanowy poniższego układu równań różniczkowych

$$\begin{aligned} M_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+D\frac{dx_1}{dt}+Kx_1-Kx_2 &= 0\\ -Kx_1+M_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+Kx_2 &= f(t)\end{aligned}$$

Przyjmujemy, że

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{dv_1}{dt},\ \text{i}\ \ \frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{dv_2}{dt}$$

oraz wybieramy x_1, v_1, x_2, v_2 jako zmienne stanu. Oczywiście

$$\frac{dx_1}{dt}=v_1,\ \text{i}\ \ \frac{dx_2}{dt}=v_2$$

Wyznaczanie modeli stanowych

Ostatecznie otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= v_1\\
\frac{dv_1}{dt} &= -\frac{K}{M_1}x_1 - \frac{D}{M_1}v_1 + \frac{K}{M_1}x_2\\
\frac{dx_2}{dt} &= v_2\\
\frac{dv_2}{dt} &= \frac{K}{M_2}x_1 - \frac{K}{M_2}x_2 + \frac{1}{M_2}f(t)
\end{aligned}
$$

lub

$$
\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dv_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\\ \frac{dv_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{K}{M_1} & -\frac{D}{M_1} & \frac{K}{M_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{K}{M_2} & 0 & -\frac{K}{M_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ v_1\\ x_2\\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} f(t)
$$

Konwersja TF do SS

Rozważmy następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u$$

Wygodnie jest wybrać jako zmienne stanu wyjście i jego kolejne pochodne, czyli

$$x_1 = y, x_2 = \frac{dy}{dt}, x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2}, \ldots, x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$$

i różniczkując otrzymujemy

$$\dot{x}_1 = \frac{dy}{dt}, \dot{x}_2 = \frac{d^2 y}{dt^2}, \dot{x}_3 = \frac{d^3 y}{dt^3}, \ldots, \dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Konwersja SS do TF

Wykonując podstawienia otrzymujemy

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 =& x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n,\\ \dot{x}_n =& -a_0 x_1 - a_1 x_2 \cdots - a_{n-1} x_n + b_0 u\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = x_1$$

Konwersja SS do TF

Wyznacz model stanowy poniższej transmitancji

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{24}{(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}$$

czyli

$$Y(s)(s^3 + 9s^2 + 26s + 24) = 24U(s)$$

Wykonując odwrotną transformate Laplace'a mamy

$$\dddot{y} + 9\ddot{y} + 26\dot{y} + 24y = 24u$$

Następnie wybieramy zmienne stanu

$$x_1 = y,\ \ x_2 = \dot{y},\ \ x_3 = \ddot{y}$$

Konwersja SS do TF

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -24 & -26 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 24\end{bmatrix}u$$

$$y = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + 0u$$

Konwersja SS do TF

Transmitancje z wielomianem w liczniku

Problem: Wyznacz model stanowy dla transmitancji

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Rozwiązanie: Dokonujemy separacji licznika i mianownika

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{U(s)} \cdot Y(s)$$

i przyjmujemy notację

$$X_1(s) = \frac{1}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

czyli

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \cdot (s^2 + 7s + 2)$$

Konwersja SS do TF

Transmitancje z wielomianem w liczniku

Postępujemy tak samo jak poprzednio wyznaczając model stanowy dla $X_1(s)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Wiemy też, że

$$Y(s) = (s^2 + 7s + 2)X_1(s)$$

i wykonując odwrotną transformatę Laplace'a otrzymujemy

$$y = \ddot{x}_1 + 7\dot{x}_1 + 2x_1$$

gdzie

$$x_1 = x_1, \;\; \dot{x}_1 = x_2, \;\; \ddot{x}_1 = x_3$$

Konwersja SS do TF

Transmitancje z wielomianem w liczniku

Ostatecznie otrzymujemy

$$y = x_3 + 7x_2 + 2x_1$$

czyli

$$y = [2\ 7\ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0u$$

Konwersja SS do TF

Jako przykład rozważmy

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
$$

Wyznaczamy

$$
(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}
$$

Teraz wyznaczamy $(sI - A)^{-1}$

Konwersja SS do TF

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}=\frac{\begin{bmatrix}(s^2+3s+2) & s+3 & 1\\ -1 & s^2+3s & s\\ -s & -2s-1 & s^2\end{bmatrix}}{s^3+3s^2+2s+1}$$

Podstawiając B, C, D i $(sI-A)^{-1}$ do

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D$$

otrzymujemy

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10(s^2+3s+2)}{s^3+3s^2+2s+1}$$

Linearyzacja modeli stanowych

Rozważmy nieliniowe równanie różniczkowe (wahadło)

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgL}{2}\sin(\theta) = T$$

Przyjmujemy, że $x_1 = \theta$ i $x_2 = \frac{d\theta}{dt}$ i dlatego

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -\frac{MgL}{2J}\sin(\theta) + \frac{T}{J} \end{aligned}$$

gdzie

$$\dot{x_2} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Czyli otrzymujemy nieliniowy model stanowy

Linearyzacja modeli stanowych

Dokonajmy linearyzacji w sąsiedztwie następującego punktu równowagi

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0 \text{ czyli } \theta = 0,\ \dot{\theta} = 0$$

czyli zaburzenie oznaczymy jako

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + \delta x_1 \\ x_2 &= 0 + \delta x_2 \end{aligned}$$

Korzystając z szeregu Taylora mamy

$$\sin(x_1) - \sin(0) = \left.\frac{d(sin(x_1))}{dx_1}\right|_{x_1=0} \delta x_1 = \delta x_1$$

Linearyzacja modeli stanowych

Oznacza to, że przyjmujemy $\sin(x_1) = \delta x_1$. Wykonując odpowiednie podstawienia otrzymujemy

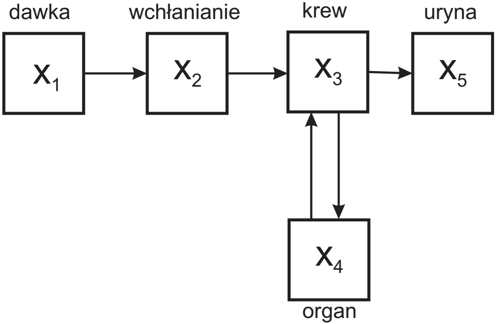
$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_1 =& \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 =& -\frac{MgL}{2J}\delta + \frac{T}{J} \end{aligned}$$

Równanie wyjścia to

$$y(t) = x_1;$$

Modelowanie absorbowania leku

Opis rozprzestrzeniania się dawki leku w ciele człowieka. Każde x_i oznacza ilość leku na danym etapie



Modelowanie absorbowania leku

- Dawka leku jest wchłaniana (przepływ leku do organu wchłaniającego jest proporcjonalny do dawki)

$$\frac{dx_1}{dt} = -K_1 x_1$$

- Przepływ dawki leku do krwi jest proporcjonalny do ilości w organie wchłaniającym

$$\frac{dx_2}{dt} = K_1 x_1 - K_2 x_2$$

- Przepływ dawki leku z krwi do organu to

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} &= K_2 x_2 - K_3 x_3 + K_4 x_4 - K_5 x_3 \\ \frac{dx_4}{dt} &= K_5 x_3 + K_4 x_4 \end{aligned}$$

Modelowanie absorbowania leku

- $K_4 x_4 - K_5 x_3$ to tylko przepływ leku z krwi do organu
- Część dawki leku jest wydalana z organizmu poprzez układ moczowy. Ta część jest proporcjonalna to ilości leku transportowanego przez krew, dlatego

$$\frac{dx_5}{dt} = K_3 x_3$$

Modelowanie absorbowania leku

Ostatecznie otrzymujemy (pobudzany war. pocz. x_1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -(K_3+K_5) & K_4 & 0 \\ 0 & 0 & K_5 & -K_4 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Analiza układów i systemów

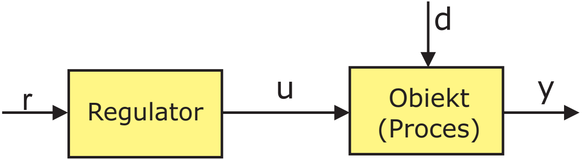
Analizujemy dostępne modele procesu/układu aby:

- Zrozumieć zachowanie rozważanego procesu/układu
- Określić wymagania dla regulowanego procesu/układu
- Dokonać wyboru podstawowych wymagań podczas projektowania regulatora (np. struktura regulatora)

Jesteśmy zainteresowani kwestiami:

- Stabilności układu otwartego
- Odpowiedzi przejściowej (na skok lub impuls)
- odpowiedzi w stanie ustalonym (stałe lub sinusoidalne wymuszenie)

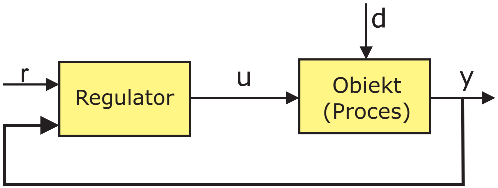
Bez sprzężenia zwrotnego



regulator=(model procesu)$^{-1}$

+ gwarancja stabilności dla stabilnych procesów
- proces niestabilny nie może być wystabilizowany
- duża wrażliwość na zakłócenia
- duża wrażliwość na niepewność modelu procesu

Układ ze sprzężeniem zwrotnym

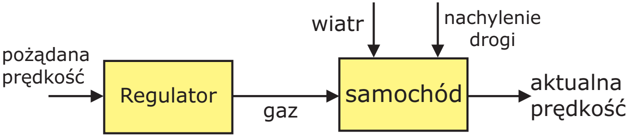


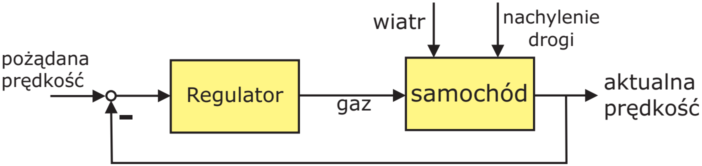
regulator $\neq$ (model procesu)$^{-1}$

+ proces niestabilny może być wystabilizowany
- mała wrażliwość na zakłócenia
- mała wrażliwość na niepewność modelu procesu
- proces stabilny może być zdestabilizowany

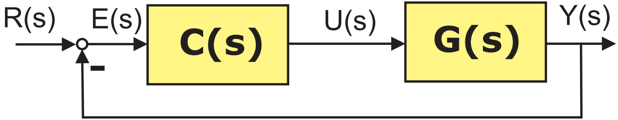
Sprzężenie zwrotne vs. bez sprzężenia

Sprzężenie zwrotne vs. bez sprzężenia





Transmitancja układu zamkniętego



$$Y = GC(R - Y)$$

$$(1 + GC)Y = GCR$$

$$G_{cl} = \frac{Y}{R} = \frac{GC}{(1 + GC)}$$

Projektowanie regulatora: cele i wybory

Różne cele regulacji

- stabilizacja obiektu
- śledzenie zadanego sygnału referencyjnego
- redukcja wpływu zakłóceń
- poprawa jakości sterowania (np. szybkości odpowiedzi)

Wybory

- Struktura regulatora (liczba biegunów)
- Parametry regulatora (położenie biegunów)

Wymagania jakościowe układów regulacji

Dziedzina czasu

- Przeregulowanie
- Czas regulacji
- Czas narastania
- Uchyb w stanie ustalonym

Dziedzina częstotliwości

- Pasmo przenoszenia
- Częstotliwość rezonansowa
- Wzmocnienie rezonansowe