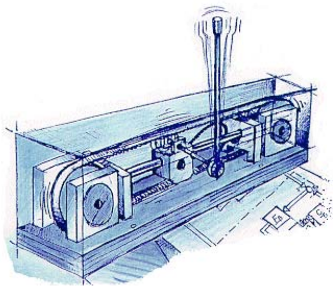
Techniki regulacji automatycznej

Metoda linii pierwiastkowych



Wojciech Paszke

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych,
Uniwersytet Zielonogórski

Plan wykładu

Podstawy metody linii pierwiastkowych

Linie pierwiastkowe w Matlab'ie

Plan wykładu

Podstawy metody linii pierwiastkowych

Linie pierwiastkowe w Matlab'ie

Metoda linii pierwiastkowych

Cel metody

Analiza położenia pierwiastków dowolnego równania algebraicznego jednej lub wielu zmiennych

Sformułowanie problemu

Wyznacz położenie pierwiastków równania

$$F(s) = P(s) + KQ(s) = 0$$

gdzie

- $P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$
- $Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0$
- K jest parametrem $-\infty < K < \infty$

Podstawowe własności

Transmitancja układu zamkniętego

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

której bieguny wyznaczamy z równania charakterystycznego

$$1 + KG(s) = 0$$

Załóżmy, że $KG(s)$ może być zapisane jako

$$\mathbf{K}G(s) = \mathbf{K}\frac{Q(s)}{P(s)}$$

więc

$$1 + KG(s) = 1 + K\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{P(s) + KQ(s)}{P(s)} = 0$$

Podstawowe własności

Jeśli parameter K nie występuje bezpośrednio, tj. nie możemy zapisać

$$1 + KG(s) = K\frac{Q(s)}{P(s)}$$

to jednak zawsze możemy doprowadzić odpowiedni wielomian do takiej postaci.

Przykład

Rozważmy

$$s(s+1)(s+2) + s^2 + (3+2K)s + 5 = 0$$

Podstawowe własności, cd.

Wykonujemy dzielenie przez wyrazy bez K, czyli

$$s(s+1)(s+2)+s^2+(3+2K)s+5=0 \;\; /(s(s+1)(s+2)+s^2+3s+5)$$

i otrzymujemy

$$1+\frac{2Ks}{s(s+1)(s+2)+s^2+3s+5}=0$$

Ostatecznie K jest odseparowane oraz

$$\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{2s}{s^3+4s^2+5s+5}$$

Podstawowe własności, cd.

Ponieważ zawsze możemy zapisać

$$KG(s) = -1$$

gdzie $G(s)$ nie zawiera parametru K. Wtedy powyższe równie jest spełnione gdy:

- spełniony jest warunek amplitudy $|G(s)| = -\frac{1}{|K|}$ dla $-\infty < K < \infty$
- oraz spełniony jest warunek fazy, tj. $(i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$

$$\angle G(s) = (2i + 1) \times 180^o \text{dla } K > 0$$
$$\angle G(s) = 2i \times 180^o \text{dla } K < 0$$

Kreślenie linii pierwiastkowych

Konstruowanie linii pierwiastkowych jest problemem graficznym gdzie

- Warunki fazy używane są do określenia trajektorii linii pierwiastkowych na płaszczyźnie s
- Warunki amplitudy służą do określenia wzmocnienia w każdym punkcie linii pierwiastkowych

W ogólnym przypadku

$$L(s) = KG(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

gdzie bieguny (p_j) i zera(z_i) funkcji $G(s)$ są

- wartościami rzeczywistymi lub/i
- wartościami zespolonymi (sprzężonymi).

Kreślenie linii pierwiastkowych

Warunek amplitudy to

$$|G(s)| = \frac{\prod_{i=1}^{m} |s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n} |s+z_i|} = \frac{1}{|K|}, \quad -\infty < K < \infty$$

a warunki fazy to

$$\angle G(s) = \sum_{i=1}^{m} \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{m} \angle(s+p_j) = (2i+1) \times 180^o \text{dla } K > 0$$

$$\angle G(s) = \sum_{i=1}^{m} \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{m} \angle(s+p_j) = 2i \times 180^o \text{dla } K < 0$$

Interpretacja warunków fazy i wzmocnienia

Na linii pierwiastkowej w pewnym punkcie s_1 mamy

- (Dla $K > 0$) Różnica pomiędzy sumą kątów wektorów wykreślonych z zer, a sumą kątów wektorów wykreślonych z biegunów $G(s)$ do bieguna s_1 jest nieparzystą krotnością 180^o.
- (Dla $K < 0$) Różnica pomiędzy sumą kątów wektorów wykreślonych z zer, a sumą kątów wektorów wykreślonych z biegunów $G(s)$ do bieguna s_1 jest parzystą krotnością 180^o (może zawierać 0 stopni).

Wartości K wzdłuż linii pierwiastkowych to:

$$|K| = \frac{\prod_{i=1}^{m} |s + z_i|}{\prod_{j=1}^{n} |s + z_i|}$$

czyli mamy stosunek iloczynów długości wektorów.

Przykład

Rozważmy następującą transmitancję

$$KG(s) = \frac{K(s+z_1)}{s(s+p_2)(s+p_3)}$$

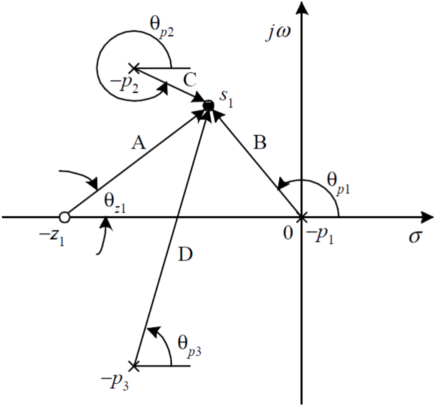
Z warunku fazy mamy (dla pewnego punku s_1 na linii pierwiastkowej)

$$M = \angle(s_1+z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1+p_2) - \angle(s_1+p_3) = \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3}$$

i rozróżniając wartości K otrzymujemy ($i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$)

$$\begin{aligned} M =& (2i+1) \times 180^o \ \text{ dla } K > 0 \\ M =& 2i \times 180^o \ \text{ dla } K < 0 \end{aligned}$$

Przykład



Z warunku amplitudy mamy

$$|K| = \frac{|s_1||s_1 + p_2||s_1 + p_3|}{|s + z_1|} = \frac{BCD}{A}$$

Pierwszy przykład

Rozważmy równanie

$$s(s+2)(s+3)+K(s+1)=0 \tag{1}$$

Wyznaczamy pierwiastki dla $K=0$ i $K=\infty$

- dla $K=0$ pierwiastkami równania (1) są $s=0,-2,-3$
- dla $K=\infty$ pierwiastkami równania (1) są $s=-1,\infty,\infty$

Dzieląc obustronnie (1) przez wyraz bez K (czyli przez $s(s+2)(s+3)$) otrzymujemy

$$1+KG(s)=1+\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

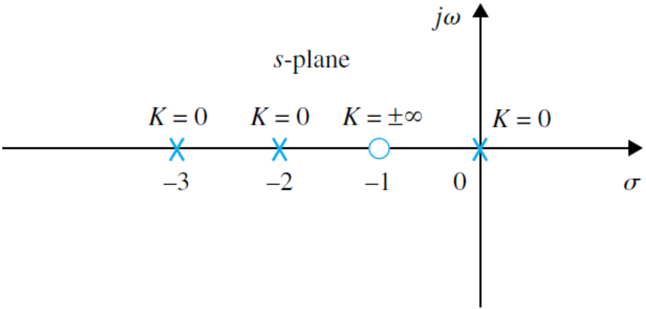
czyli

$$KG(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

Pierwszy przykład, cd.

Obserwacja:

- Pierwiastki równania (1) dla $K = 0$ są takie same jak bieguny funkcji $G(s)C(s)$.
- Pierwiastki równania (1) dla $K = \infty$ są takie same jak zera funkcji $G(s)C(s)$, włączając te ulokowane w ∞.



Własności linii pierwiastkowych

Podstawowe własności:

- zaczynają się (dla $K = 0$) w biegunach funkcji $G(s)$,
- kończą się (dla $K = \pm\infty$) w zerach funkcji $G(s)$, uwzględniając zera w nieskończoności.
- liczba gałęzi równna jest stopniowi analizowanego wielomianu, np.: dla

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0$$

  mamy 3 gałęzie, czyli liczba gałęzi jest równa liczbie pierwiastków rozważanego równania.
- Linie pierwiastkowe są symetryczne względem osi liczb rzeczywistych na płaszczyźnie s.

Własności linii pierwiastkowych

Podstawowe własności:

- Kąty nachylenia asymptot linii pierwiastkowych dla $s \to \infty$ to

$$\theta_i = \frac{2i+1}{|n-m| \times 180^o} \text{ dla } K > 0; \theta_i = \frac{2i}{|n-m| \times 180^o} \text{ dla } K < 0$$

  gdzie $i = 0, 1, 2, \ldots, |n-m| - 1$ oraz
  - n - liczba biegunów
  - m - liczba zer
- Punkt przecięcia asymptot na osi rzeczywistej

$$\sigma_a = \frac{\sum s_n - \sum s_m}{n - m}$$

- Punkty przecięcia z osią urojoną możemy wyznaczyć z kryterium Routh'a.

Własności linii pierwiastkowych

Podstawowe własności:

- Kąty nachylenia asymptot linii pierwiastkowych dla $s \to \infty$ to

$$\theta_i = \frac{2i+1}{|n-m| \times 180^o} \text{ dla } K > 0; \theta_i = \frac{2i}{|n-m| \times 180^o} \text{ dla } K < 0$$

  gdzie $i = 0, 1, 2, \ldots, |n-m| - 1$ oraz
  - n - liczba biegunów
  - m - liczba zer
- Punkt przecięcia asymptot na osi rzeczywistej

$$\sigma_a = \frac{\sum s_n - \sum s_m}{n-m}$$

- Punkty przecięcia z osią urojoną możemy wyznaczyć z kryterium Routh'a.

Własności linii pierwiastkowych

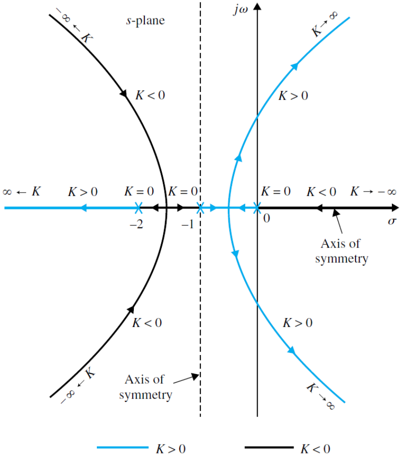
Podstawowe własności:

- Wyznaczenie punktów rozgałęzień na linii pierwiastkowej

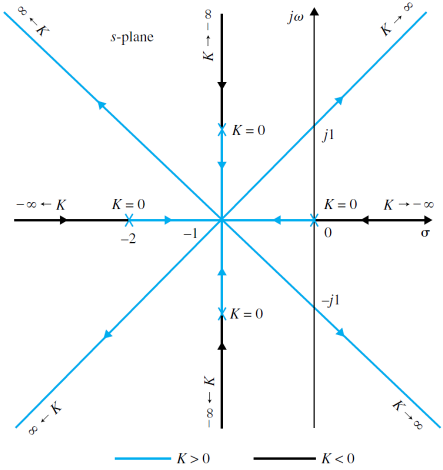
$$\frac{dK}{ds} = 0, \quad \frac{dG(s)}{ds} = 0$$

- Linia pierwiastkowa $(K > 0)$ występuje w tych odcinkach osi liczb rzeczywistych dla których suma rzeczywistych zer i biegunów $G(s)$ z prawej strony tego odcinka jest nieparzysta.

Przykłady linii pierwiastkowych



Przykłady linii pierwiastkowych



Linie pierwiastkowe w Matlab'ie

Problem regulacji

Dla układu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+7}{s(s+5)(s+15)(s+20)}$$

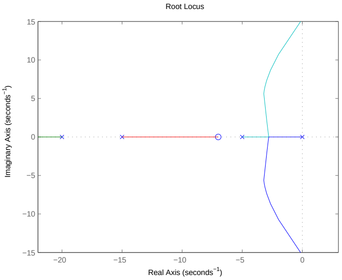
dobierz wzmocnienie K aby układ zamknięty spełniał następujące wymagania jakościowe regulacji

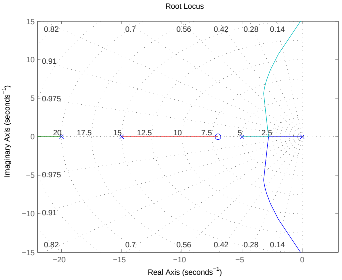
- POS=5%
- $\mathrm{T_r} = 1$[s]

```
s = tf('s');
sys = (s + 7)/(s*(s + 5)*(s + 15)*(s + 20));
rlocus(sys)
```

```
axis([-22 3 -15 15])
```

Linie pierwiastkowe w Matlab'ie





Linie pierwiastkowe w Matlab'ie

Na podstawie obliczeń mamy

- POS$\leqslant 5\%\ \Leftrightarrow\ \zeta \geqslant 0.7$

  $\zeta = 0.7$ to zbiór punktów $\angle = 45^o$

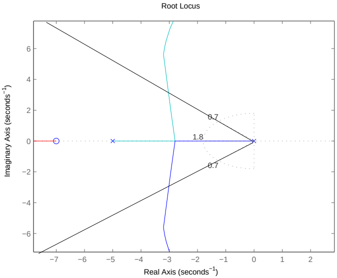
- $\mathrm{T_r} \leqslant 1$[s] $\ \Leftrightarrow\ \omega_n \geqslant 1.8$ [rad/s]

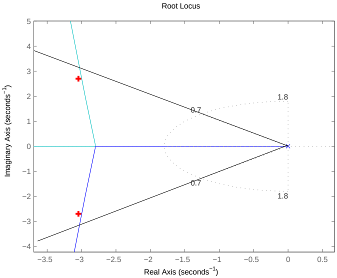
  $\omega_n = 0.7$ to zbiór punktów $r = 1.8$

W Matlab'ie wpisujemy

```
omegaN=1.8
zeta=0.7
sgrid(zeta,omegaN)
```

Linie pierwiastkowe w Matlab'ie





Poszukując odpowiedniego położenia dominujących biegunów,wykonujemy polecenie

```
[k,bieguny] = rlocfind(sys)
```

Linie pierwiastkowe w Matlab'ie

Wybrany punkt(y) na wykresie linii

selected_point = -2.9185 + 0.9974i
k = 351.4442
poles =
-22.0100
-12.3046
-2.8427 + 1.0015i
-2.8427 - 1.0015i

Sprawdzenie wyniku

```
sys_cl = feedback(k*sys,1)
step(sys_cl)
```