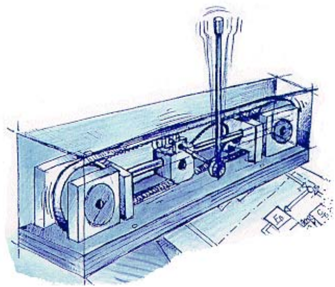
Automatyka i robotyka

Wykład 5 - Stabilność układów dynamicznych



Wojciech Paszke

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych,
Uniwersytet Zielonogórski

Plan wykładu

Wprowadzenie

Stabilność modeli stanowych

Uchyb w stanie ustalonym

Dobór struktury i parametrów regulatora

Plan wykładu

Wprowadzenie

Stabilność modeli stanowych

Uchyb w stanie ustalonym

Dobór struktury i parametrów regulatora

Plan wykładu

Wprowadzenie

Stabilność modeli stanowych

Uchyb w stanie ustalonym

Dobór struktury i parametrów regulatora

Plan wykładu

Wprowadzenie

Stabilność modeli stanowych

Uchyb w stanie ustalonym

Dobór struktury i parametrów regulatora

Stabilność a niestabilność

Fakty

- Najważniejszy problem do rozwiązania dla układów regulacji automatycznej.
- W układach z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego musimy szczególnie dbać o stabilność
- Nie możemy określić wymagań jakościowych regulacji dla układów niestabilnych
- Nie wiemy do jak określić wartość wyjścia układu niestabilnego w stanie ustalonym

Stabilność układów

Odpowiedź układu na wymuszenie

$$y(t) = y_{wymuszona}(t) + y_{naturalna}(t)$$

Dla układów liniowych

- Odpowiedź naturalna zawsze dąży do zera dla $t \to \infty$ gdy układ jest stabilny.
- Odpowiedź naturalna zawsze rośnie (bez ograniczenia) dla $t \to \infty$ gdy układ jest niestabilny.
- Odpowiedź naturalna nie rośnie ani nie maleje lub oscyluje dla $t \to \infty$ gdy układ jest na granicy stabilności.

Stabilność układów dynamicznych

Warunek konieczny stabilności

Równanie charakterystyczne dla $G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$

$$M(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i s^i = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0 = 0$$

Można pokazać, że

- układ jest stabilny $\Rightarrow a_i > 0 \forall i$ lub $a_i < 0 \forall i$ (czyli współczynniki maja te same znaki)
- układ jest na granicy stabilności gdy $a_0 = 0$

Stabilność układów dynamicznych

Warunek konieczny stabilności

a) $M(s) = s^5 + 5s^4 + 3s^3 - 2s^2 + s + 8 = 0$
warunek konieczny nie jest spełniony ($a_2 < 0$)

b) $M(s) = s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 8 = 0$
warunek konieczny nie jest spełniony ($a_1 = 0$)

c) $M(s) = s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s = 0$
warunek konieczny nie jest spełniony ($a_0 = 0$ - na granicy stabilności)

d) $M(s) = -s^5 - 5s^4 - 3s^3 - 2s^2 - s - 8 = 0$
warunek konieczny jest spełniony ($a_i < 0 \forall i$)

W celu sprawdzenia stabilności korzystamy z algebraicznego warunku Routh'a

- efektywna (tj. szybka) metoda sprawdzenia stabilności
- bazujemy tylko na współczynnikach wielomianu charakterystycznego.
- wyznaczamy liczbę biegunów w lewej (prawej) półpłaszczyźnie ale nie ich dokładne położenie
- ma szerokie zastosowanie jeśli mamy wyznaczyć regiony stabilności (kiedy współczynniki są parametrami o nieznanych wartościach)

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a (1877)

Wielomian charakterystyczny

$$M(s) = \sum_{i=n}^{1} a_n s^n = 0$$

0	s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\cdots$
1	s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\cdots$
2	s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$
3	s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n-1	s^1	y_1	y_2			
n	s^0	z_1				

$$b_1 = \frac{-(a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2})}{a_1} \qquad b_2 = \frac{-(a_n a_{n-5} - a_{n-1} a_{n-4})}{a_1}, \ \ldots$$

$$c_1 = \frac{-(a_{n-1} b_2 - b_1 a_{n-3})}{b_1} \qquad c_2 = \frac{-(a_{n-1} b_3 - b_1 a_{n-5})}{b_1}, \ \ldots$$

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a - przykład 1

Sprawdzić stabilność układu, którego wielomian charakterystyczny to

$$M(s) = s^4 + s^3 + s^2 + 2s + 3 = 0$$

Tablica Routh'a

0	s^4	1	1	3
1	s^3	1	2	
2	s^2	-1	3	
3	s^1	5	0	
4	s^0	3		

Wniosek: Dwukrotna zmiana znaku w pierwszej kolumnie = dwa bieguny w prawej półpłaszczyźnie (istotnie, bieguny to $-1.074 \pm j0.706$ i $0.574 \pm j1.219$)

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a - przykład 2

Sprawdzić stabilność układu regulacji, gdzie regulatorem jest regulator proporcjonalny, a transmitancja obiektu regulacji to

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{0.6}{0.035s+1}\frac{1513}{(s^2+55s+1513)}$$

Transmitancja układu zamkniętego to

$$G_{cl}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

a wielomian charakterystyczny to

$$1+KG(s)=0 \Leftrightarrow 0.053s^3+2.925s^2+107.955s+1513+907.8K=0$$

Czyli badamy stabilność w odniesieniu do wartości parametru K

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a - przykład 2

Tworzymy odpowiednią tablice Routh'a

0	s^3	0.035	107.955
1	s^2	2.925	1513+907.8K
2	s^1	89.85-10.86K	0
3	s^0	1513+907.8K	0

Układ będzie stabilny dla $K > 0$ i $K < 89.85/10.86 \Leftrightarrow K < 8.27$

Przypadek szczególny

- Pojawienie sie wartości 0 w pierwszej kolumnie oznacza niestabilność lub w najlepszym przypadku układ na granicy stabilności.
- Dalsze tworzenie tabeli jest niemożliwe ponieważ wymagane będzie dzielenie przez 0 - musimy poszukać alternatywnego rozwiązania
- W przypadku wystąpienia wartości 0 w pierwszej kolumnie dokonuje my wprowadzenia symbolu $\delta \to 0$ aby kontynuować sprawdzanie zmian znaków

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a - przykład 3

Sprawdź stabilność układu, którego wielomian charakterystyczny to

$$M(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 1 = 0$$

Zaczynamy oczywiście od tworzenia tablicy Routh'a

0	s^5	1	2	1
1	s^4	2	4	1
2	s^3	0	0.5	

Mamy w pierwszej kolumnie wartość 0 - zastępujemy ją nową zmienną $\delta \to 0$.

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a - przykład 3

Podstawiamy δ i tworzymy dalej tablice Routh'a

0	s^5	1	2	1
1	s^4	2	4	1
2	s^3	δ	0.5	
3	s^2	$-1/\delta$	1	
4	s^1	0.5	0	
5	s^0	1		

Ostatecznie mamy dwie zmiany znaku czyli układ jest niestabilny (istotnie, bieguny układu to: $-0.09 \pm j0.533$, $0.069 \pm j1.274$ i -1.957).

Przypadek szczególny

- Pojawienie się wartości 0 w całym wierszu oznacza istnienie dzielnika wielomianu, którego pierwiastki są symetryczne w odniesieniu do początku układu współrzędnych.
- Pierwiastki wielomianu to $s = \pm\sigma$ lub $s = \pm j\beta$ lub $-\sigma \pm j\beta$ i $\sigma \pm j\beta$
- Dzielnikiem wielomianu będzie $F(s)$ wzięty z pierwszego niezerowego wiersza powyżej wiersza zerowego.
- Współczynniki które wpiszemy w wiersz zerowy uzupełniamy z wyrażenia $\frac{dF(s)}{ds}$

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a - przykład 4

Dany jest układ regulacji, gdzie regulatorem jest regulator proporcjonalny, czyli transmitancja układu otwartego to

$$G_{ol}(s) = \frac{KG(s)}{=} K \frac{1}{s(s+1)(s^2+s+1)}$$

Znajdź wartość K dla której układ po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego będzie na granicy stabilności i wyznacz pulsacje oscylacji.
Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego to

$$M(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + K = 0$$

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a - przykład 4

Tworzymy odpowiednią tablice Routh'a

0	s^4	1	2	K
1	s^3	2	1	
2	s^2	1.5	K	
3	s^1	1-4K/3		

Dla $K = 0.75$ w wierszu 3 mamy 0. Oznacza to, że dzielnikiem wielomianu charakterystycznego będzie (pobrany z wiersza nr 2)

$$F(s) = \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow F(s) = 2s^2 + 1 = 0$$

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a - przykład 4

Równanie charakterystyczne to

$$M(s) = (2s^2 + 1)(0.5s^2 + s + 0.75)$$

i uzupełniamy tablicę Routh'a gdzie 3 wiersz wypełniamy współczynnikami $dF(s)/ds$ i otrzymujemy (dla $K = 0.75$)

0	s^4	1	2	0.75
1	s^3	2	1	
2	s^2	1.5	0.75	
3	s^1	4		
4	s^0	0.75		

Stabilność układów dynamicznych

Kryterium Routh'a - przykład 4

- Poza wierszem 3 nie ma zmian znaków ani elementów o wartości 0 - nie ma pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie.
- Pierwiastki muszą leżeć na osi urojonej (dla $K = 0.75$).
- Wartość pulsacji odnajdziemy gdy $s = j\omega$

$$F(j\omega) = -2\omega^2 + 1 = 0$$

czyli $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$[rad/sec]

Stabilność modeli stanowych

Modele w przestrzeni stanów

- Wartości własne macierzy A to bieguny układu, które wyznaczamy tak
$$\det(sI - A) = 0$$
- Lokalizacje biegunów możemy wyznaczyć numerycznie (polecenie `eig(A)` w MATLAB'ie)
- Możemy wykorzystać tabele Routh'a sprawdzając położenie pierwiastków wielomianu
$$\det(sI - A)$$

Przykład

Rozważmy następujący układ

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

gdzie

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -3 & -1 \\ -2 & s-8 & -1 \\ 10 & 5 & s+2 \end{bmatrix}$$

i dlatego

$$det(sI - A) = s^3 - 6s^2 - 7s - 520$$

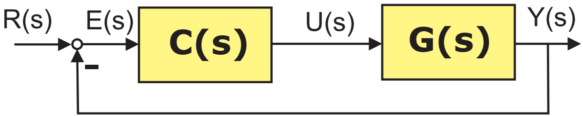
Przykład

Tworzymy tabelę Routh'a

s^3	1	-7
s^2	$\cancel{-6}$ -3	$\cancel{-52}$ -26
s^1	$\cancel{\frac{47}{3}}$ -1	$\cancel{0}$ 0
s^0	-26	

Układ niestabilny (jedna zmiana w pierwszej kolumnie - jeden biegun w prawej półpłaszczyźnie)

Śledzenie sygnału referencyjnego

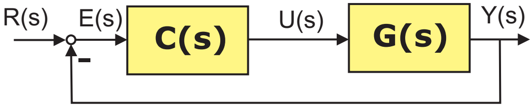


Problem: **Jak układ zamknięty śledzi zadany sygnał referencyjny?**

Podstawowe sygnały referencyjne

- $R(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow r(t) = 1(t)$ (pozycja)
- $R(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow r(t) = t$ (prędkość)
- $R(s) = \frac{1}{s^3} \Leftrightarrow r(t) = \frac{t^2}{2}$ (przyspieszenie)

Uchyb w stanie ustalonym



$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)} R(s) \text{ gdzie } L(s) = G(s)C(s)$$

Uchyb w stanie ustalonym

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+L(s)} R(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{s^k}$$

Uchyb w stanie ustalonym

Definicja

Uchyb w stanie ustalonym to błąd po zaniku odpowiedzi przejściowej

Układ otwarty

$$E(s) = R(s) - Y(s) = (1 - G_o(s))R(s)$$

Układ zamknięty

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)}R(s)$$

$G_o(s)$ - transmitancja układu otwartego.

Uchyb w stanie ustalonym

Twierdzenie o wartości końcowej

Uchyb w stanie ustalonym wyzanczamy z pomocą twierdzenia o wartości końcowej

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Przykład dla $R(s) = \frac{A}{s}$ (skok jednostkowy)

Układ otwarty

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s(1 - G_o(s)) \left(\frac{A}{s}\right) = \lim_{s \to 0} A(1 - G_o(s)) = A(1 - G_o(0))$$

Układ zamknięty

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{1}{1 + G_o(s)}\right) \left(\frac{A}{s}\right) = \frac{A}{1 + G_o(0)}$$

Uchyb w stanie ustalonym

Przypadek ogólny (dla skoku jednostkowego)

$$G_o(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}$$

Własności:

- Bład ustalony zależy od liczby układów całkujacych N,
- Dla $N > 0$ $G_o(0) \to \infty$ i $e_{ss} \to 0$,
- N oznacza **typ układu**,
- dla $N = 0$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+G_o(0)} = \frac{1}{1+\left(K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)/\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)\right)}$$

Uchyb w stanie ustalonym

Zdefiniujmy **stałą uchybu pozycyjnego**

$$K_p = \lim_{s \to 0}(G_o(s))$$

i wtedy

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Łatwo też sprawdzić, że dla N 1

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + \left(K \prod_{i=1}^{M}(s + z_i)/s^N \prod_{k=1}^{Q}(s + p_k)\right)} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{s^N}{s^N + \left(K \prod_{i=1}^{M}(s + z_i)/\prod_{k=1}^{Q}(s + p_k)\right)} = 0 \end{aligned}$$

Uchyb w stanie ustalonym

Dla sygnału referencyjnego $r(t) = A \cdot t \cdot 1(t)$ (funkcja liniowo narastająca - prędkość)

$$
\begin{aligned}
e_{ss} &= \lim_{s \to 0} \frac{s(A/s^2)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{s + sG(s)} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{A}{sG(s)}
\end{aligned}
$$

Uchyb w stanie ustalonym

Stała uchybu prędkościowego

Zdefiniujmy **stałą uchybu prędkościowego**

$$K_v = \lim_{s \to 0} s(G(s))$$

i wtedy dla $N = 1$

$$e_{ss} = \frac{A}{\left(K \prod_{i=1}^{M}(s + z_i) / \prod_{k=1}^{Q}(s + p_k)\right)} = \frac{A}{K_v}$$

Oznacza to, że

- dla N 2 to $e_{ss} = 0$
- dla $N = 1$ to $e_{ss} \neq 0$
- dla $N = 0$ to $e_{ss} = \infty$

Uchyb w stanie ustalonym

Dla sygnału referencyjnego $r(t) = A \cdot t^2/2 \cdot 1(t)$ (funkcja paraboliczna - przyspieszenie)

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s(A/s^3)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{s^2 G(s)}$$

Uchyb w stanie ustalonym

Stała uchybu przyspieszeniowego

Zdefiniujmy **stałą uchybu przyspieszeniowego**

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 (G_0(s))$$

i wtedy dla $N = 2$

$$e_{ss} = \frac{A}{\left(K \prod_{i=1}^{M} (s + z_i) / \prod_{k=1}^{Q} (s + p_k) \right)} = \frac{A}{K_a}$$

Oznacza to, że

- dla N 3 to $e_{ss} = 0$
- dla $N = 2$ to $e_{ss} \neq 0$
- dla $N = 1$ to $e_{ss} = \infty$
- dla $N = 0$ to $e_{ss} = \infty$

Uchyb w stanie ustalonym

Przykład 1

Zadanie

Wyznacz uchyb w stanie ustalonym w układzie zamkniętym po podaniu sygnału zadanego o postaci funkcji $r(t) = 5t1(t)$. Transmitancja układu otwartego to

$$G_o(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$$

Wyznaczamy

- Transformatę Laplace'a sygnału $r(t)$

$$R(s) = \frac{5}{s^2}$$

- Transmitancję układu zamkniętego

$$G_z(s) = \frac{G_o}{1+G_o} = \frac{10s+1}{s^3+7s^2+20s+10}$$

Uchyb w stanie ustalonym

Przykład 1

Obliczenia:

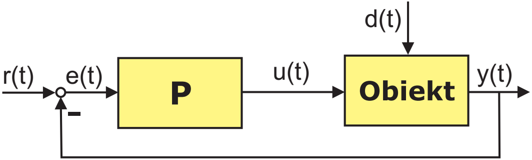
- Stała uchybu prędkościowego

$$K_v = \lim_{s \to 0}(sG_o(s)) = \lim_{s \to 0} s\frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)} = 1$$

- Uchyb w stanie ustalonym

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{5}{1} = 5$$

Sterowanie proporcjonalne (P)



Regulator:

- statyczny współczynnik wzmocnienia K_p

$$u(t) = K_p e(t) = K_p(r(t) - y(t))$$

Sterowanie proporcjonalne (P)

Obiekt (przykład): $G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$

Regulator proporcjonalny: $C(s) = K_p$

Bieguny układu zamkniętego: rozwiązanie równania

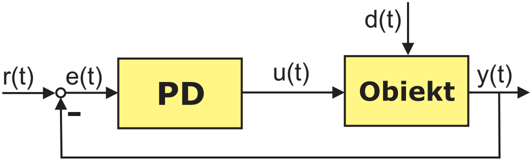
$$1 + \frac{KK_p}{s(s+a) = 0}$$

czyli

$$s^2 + as + KK_p = 0$$

Wniosek: K_p **ma niewielki(!!!) wpływ na położenie biegunów**

Sterowanie proporcjonalno-różniczkujące (PD)



Regulator:

- dynamika regulatora:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

- Problem: **Dobór współczynników wzmocnienia K_p i K_d**

Sterowanie proporcjonalno-różniczkujące (PD)

Obiekt (przykład): $G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$

Regulator proporcjonalny: $C(s) = K_p + K_d s$

Bieguny układu zamkniętego: rozwiązanie równania

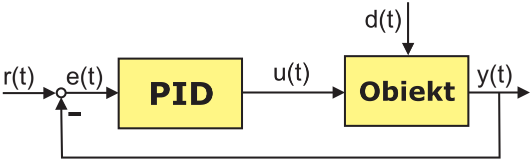
$$1 + \frac{K(K_p + K_d s)}{s(s+a) = 0}$$

czyli

$$s^2 + (a + KK_d)s + KK_p = 0$$

Wniosek: K_p **i** K_d **dokładnie określają wszystkie położenia biegunów układu 2-ego rzędu (i tylko takiego !)**

Sterowanie proporcjonalno-całkująco-różniczkujące (PID)



Regulator:

- dynamika regulatora

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

- Problem: **Dobór współczynników wzmocnienia K_p, K_i i K_d**

Kiedy używamy akcji całkującej?

- eliminacja uchybu regulacji
- podwyższenie rzędu układu otwartego

Przykład

Układ otwarty: $L(s) = G(s)K_p = \frac{KK_p}{\tau s+1}$

Sygnał referencyjny: $R(s) = \frac{1}{s}$

Wymaganie: brak uchybu czyli $e_{ss} = 0$

Wniosek: **Uchyb w stanie ustalonym $\neq$ 0 - trzeba użyć regulatora PI**

Wpływ akcji całkującej

Obiekt (przykład): $y(t) + b\dot{y} = u(t)$ $(Y(s) + bsY(s) = U(s))$

Regulator typu P: $u(t) = K_p(r(t) - y(t))$

Równanie układu zamkniętego:

$$y(t) + b\dot{y} = K_p r(t) - K_p y(t) \Leftrightarrow Y(s) + bsY(s) = K_p R(s) - K_p Y(s)$$

Stan ustalony $(\dot{y} = 0)$

$$y(t) = \frac{K_p}{1 + K_p} \Rightarrow y(t) \approx r(t)\ (\mathrm{dla} K_p \gg 1)$$

Wniosek: **Uchyb w stanie ustalonym $\neq 0$**

Regulator PI

Obiekt (przykład): $y(t) + b\dot{y} = u(t)$ $(Y(s) + bsY(s) = U(s))$

Regulator typu PI: $u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))d\tau$

Równanie układu zamkniętego:

$$\dot{y} + b\ddot{y} = K_i r(t) - K_p\dot{y} - K_i y(t)$$

Stan ustalony ($\dot{y} = 0,\ \ddot{y} = 0$)

$$0 = K_i r(t) - K_i y(t) \Rightarrow y(t) = r(t)$$

Wniosek:**Brak uchybu w stanie ustalonym !**

Wpływ parametrów regulatora PID

- K_p przyspieszenie odpowiedzi ale i większe oscylacje
- K_d zmniejszenie oscylacji ale większa wrażliwość na szumy
- K_i usuwa błąd w stanie ustalonym ale zwiększa przeregulowanie

Dobór parametrów regulatora PID

- Eksperymentalny dobór parametrów K_p, K_d, K_i (często wspomagany komputerowo).
- Analiza i synteza z użyciem modelu obiektu (procesu).