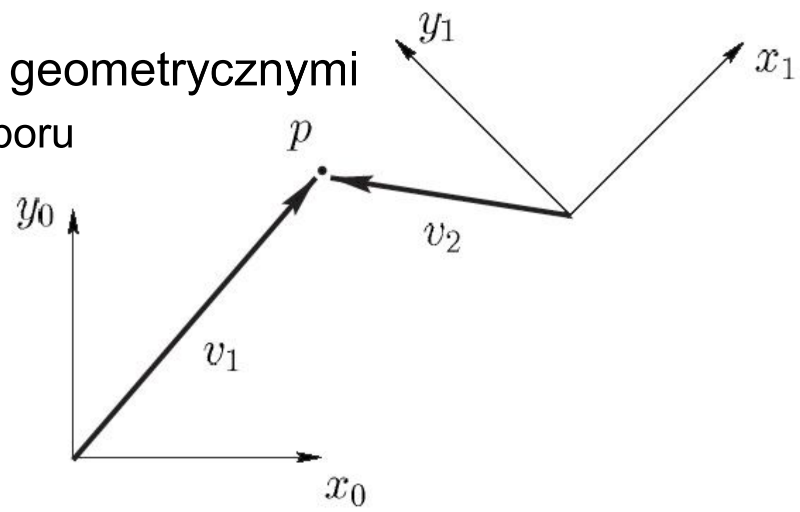
Ruchy ciała sztywnego i przekształcenia jednorodne

Reprezentowanie pozycji

- Definicja: układ współrzędnych
  - Zbiór n bazowych wektorów ortonormalnych rozpinających $\boldsymbol{R}^n$
  - Na przykład, $\hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Rerezentując punkt p, musimy podać układ współrzędnych
  - Względem o_0: $p^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$
  - Względem o_1: $p^1 = \begin{bmatrix} -2.8 \\ 4.2 \end{bmatrix}$
- v_1 oraz v_2 są niezmienniczymi obiektami geometrycznymi
  - Ale ich reprezentacja jest zależna od wyboru układu współrzędnych



$$v_1^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, v_1^1 = \begin{bmatrix} 7.77 \\ 0.8 \end{bmatrix}, v_2^0 = \begin{bmatrix} -5.1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2^1 = \begin{bmatrix} -2.8 \\ 4.2 \end{bmatrix}$$

Obroty

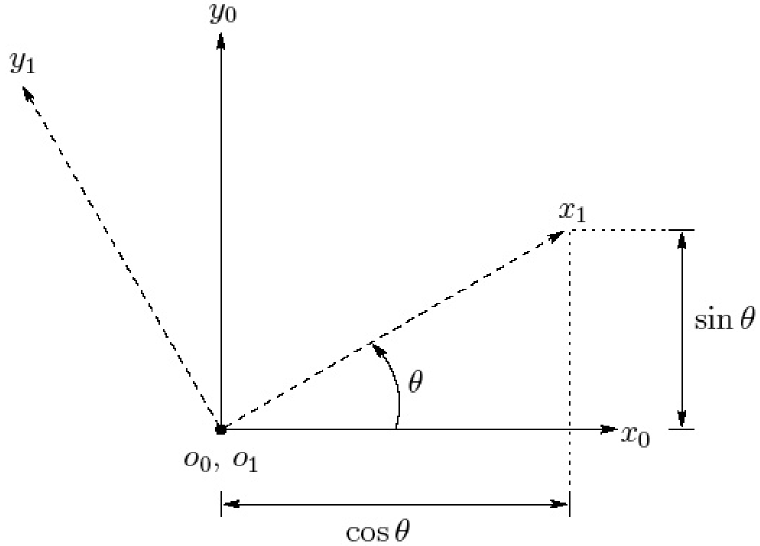
- Obroty 2D
  – Reprezentowanie jednego układu współrzędnych w kategoriach innego

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 & y_1^0 \end{bmatrix}$$

  – gdzie wektory jednostkowe definiuje się następująco:

$$x_1^0 = \|\hat{x}_0\| \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, y_1^0 = \|\hat{y}_0\| \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



  – Jest to **macierz obrotu**

Podejście alternatywne

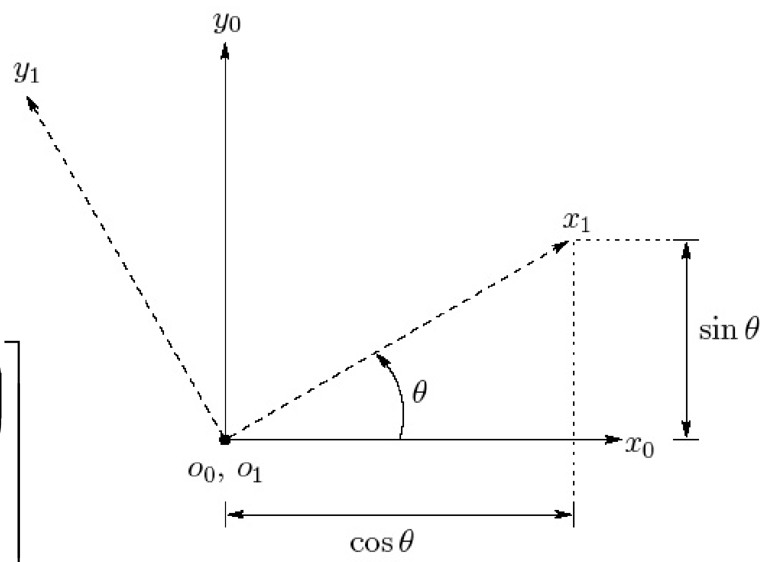
- Macierze obrotu jako projekcje
  - Rzutowanie osi o_1 na osie układu o_0

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 \end{bmatrix}, y_1^0 = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_0 \\ \hat{y}_1 \cdot \hat{y}_0 \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{y}_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \|\hat{x}_1\|\|\hat{x}_0\|\cos\theta & \|\hat{y}_1\|\|\hat{x}_0\|\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \|\hat{x}_1\|\|\hat{y}_0\|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \|\hat{y}_1\|\|\hat{y}_0\|\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Własności macierzy obrotu

- Obroty odwrotne:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \cdot \hat{x}_1 & \hat{y}_0 \cdot \hat{x}_1 \\ \hat{x}_0 \cdot \hat{y}_1 & \hat{y}_0 \cdot \hat{y}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \|\hat{x}_0\|\|\hat{x}_1\|\cos\theta & \|\hat{y}_0\|\|\hat{x}_1\|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \|\hat{x}_0\|\|\hat{y}_1\|\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \|\hat{y}_0\|\|\hat{y}_1\|\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \left(R_1^0\right)^T$$

- Lub też, inna interpretacja używa relacji parzystości/nieparzystości:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \left(R_1^0\right)^T$$

Własności macierzy obrotu

- Odwrotność macierzy obrotu:

$$\left(R_1^0\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{y}_0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \|\hat{x}_1\|\|\hat{x}_0\|\cos\theta & \|\hat{y}_1\|\|\hat{x}_0\|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \|\hat{x}_1\|\|\hat{y}_0\|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \|\hat{y}_1\|\|\hat{y}_0\|\cos\theta \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\left(R_1^0\right)} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \left(R_1^0\right)^T$$

- Wyznacznik macierzy obrotu jest zawsze równy ±1
  - +1 jeżeli ograniczamy się do układów prawoskrętnych

Własności macierzy obrotu

- Podsumowanie:
  - Kolumny (wiersze) R są wzajemnie ortogonalne
  - Każda kolumna (wiersz) R jest wektorem jednostkowym

$$R^T = R^{-1}$$
$$\det(R) = 1$$

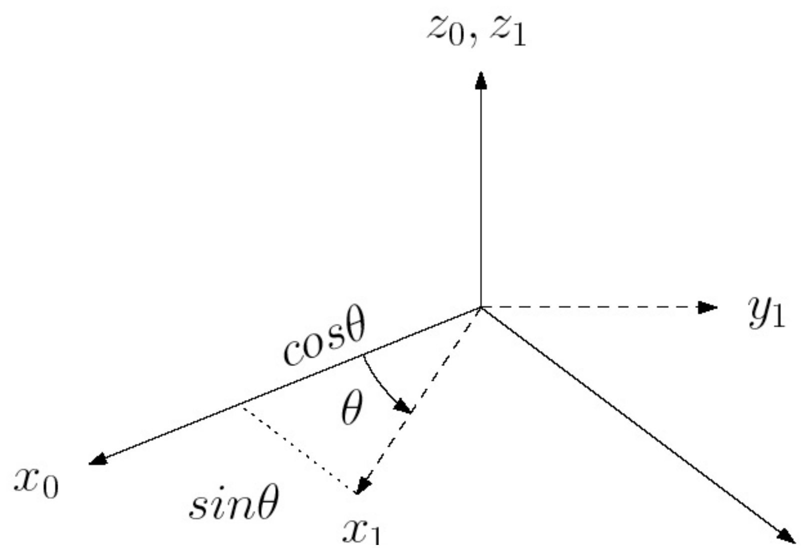
- Zbiór wszystkich n x n macierzy mających te własności nazywa się **grupą obrotów** (*ang.* **Special Orthogonal group)** rzędu n

$$R \in SO(n)$$

Obroty trójwymiarowe

- Ogólny obrót 3D:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_0 & \hat{z}_1 \cdot \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{y}_0 & \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{z}_0 & \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_0 & \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_0 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

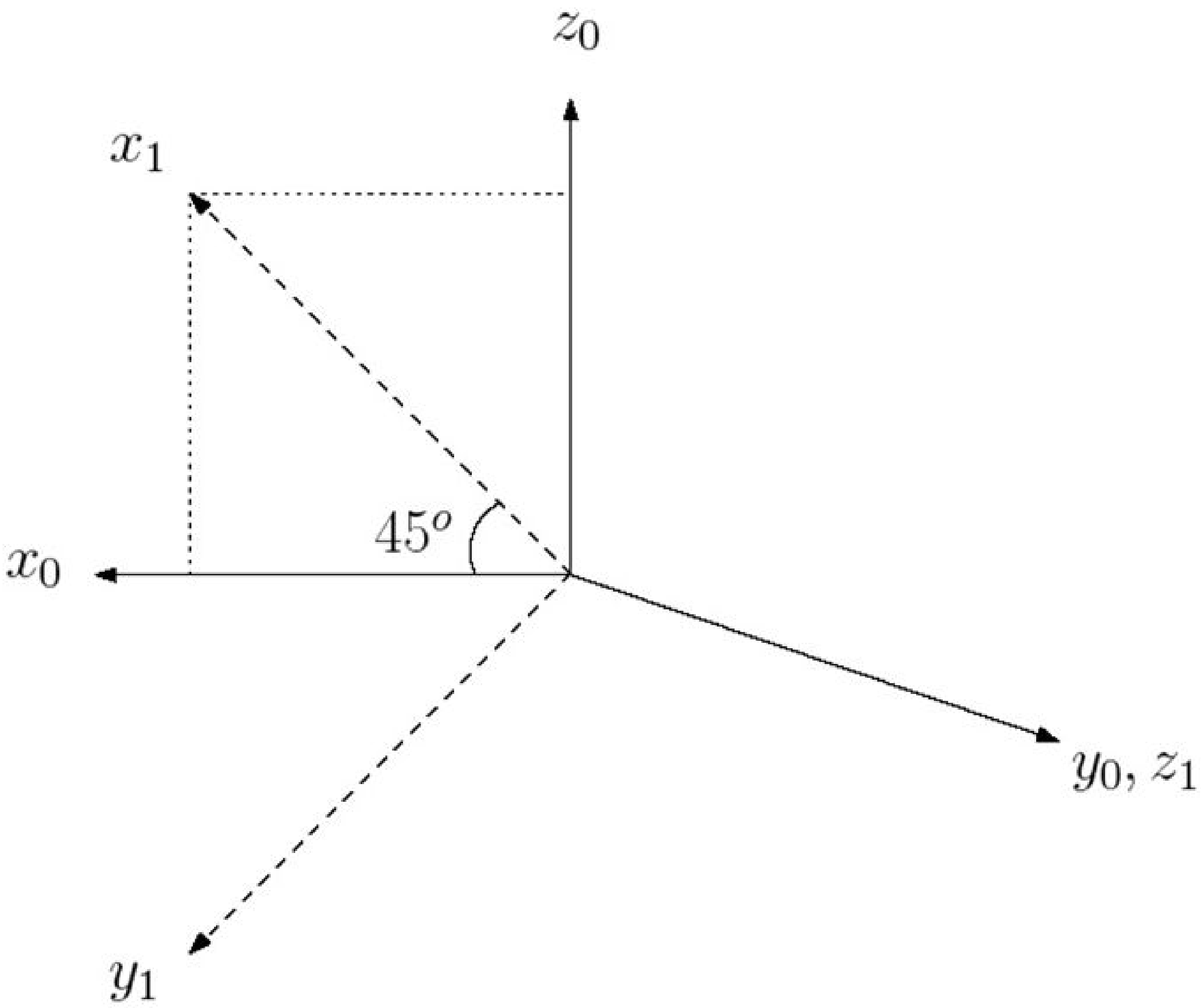


- Przypadki szczególne
  - Podstawowe macierze obrotu

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



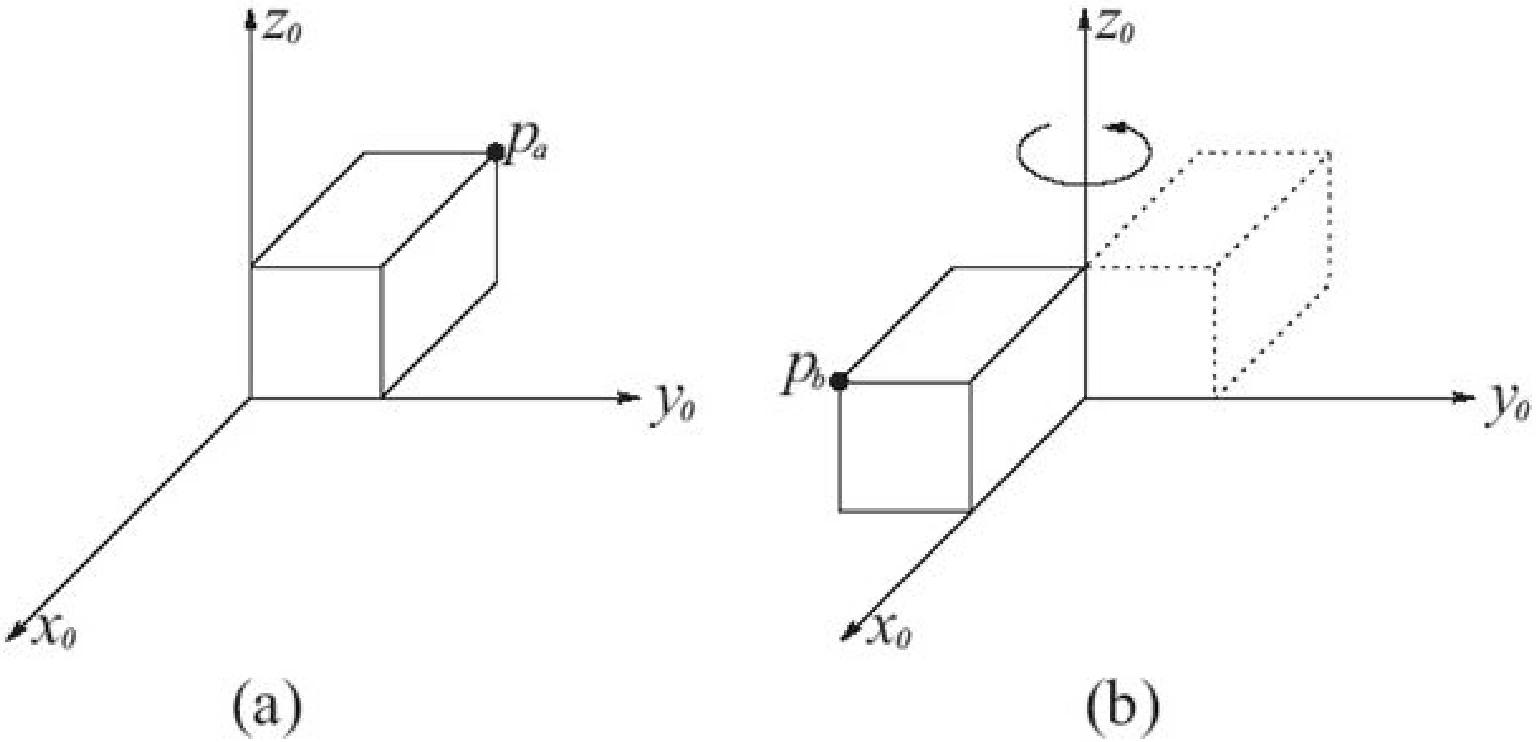
Ćwiczenie: Wyznacz macierz obrotu R_1^0

Własności macierzy obrotu (c.d.)

- *SO*(3) jest grupą ze względu na mnożenie
  1. Zamkniętość: $R_1, R_2 \in SO(3) \Rightarrow R_1 R_2 \in SO(3)$
  2. Jedność: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SO(3)$
  3. Odwrotność: $R^T = R^{-1}$
  4. Łączność: $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$ $\longrightarrow$ Pozwala składać obroty: $R_{ac} = R_{ab} R_{bc}$
- W ogólności, elementy *SO*(3) nie są przemienne:

$$R_1 R_2 \neq R_2 R_1$$

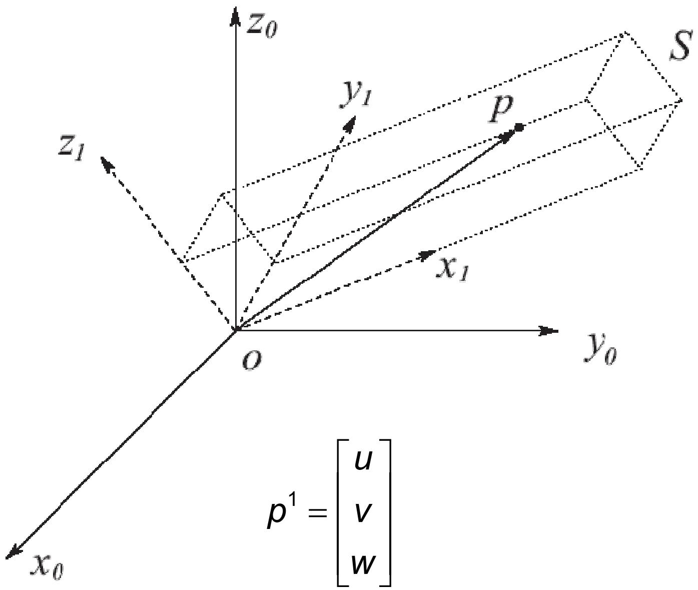
Obroty względem zadanej osi



Blok na rys. (b) powstał przez obrót bloku z rys. (a) o kąt π względem osi z_0.

Przekształcenia z zastosowaniem obrotów

- Założmy, że p jest danym punktem obiektu sztywnego z ustalonym układem współrzędnych o_1
  - Punkt p może być przedstawiony w układzie o_0 (p^0) poprzez projekcję na osie układu bazowego



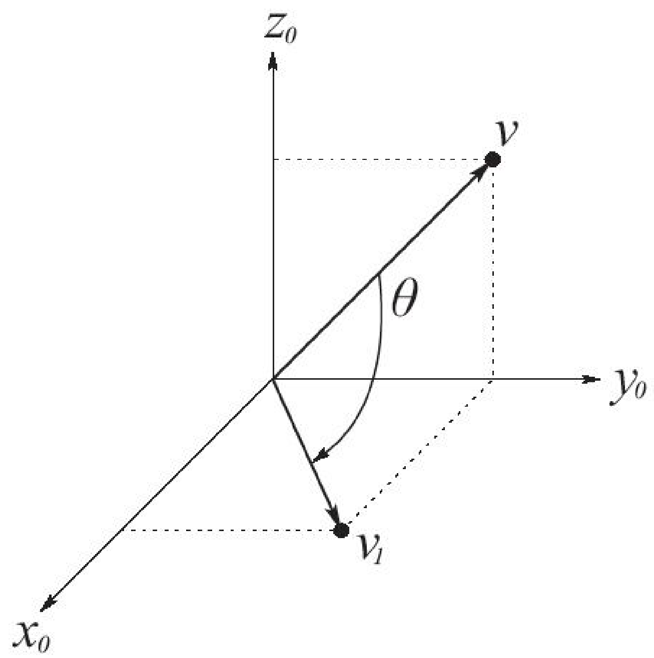
$$p^1 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$p^0 = \begin{bmatrix} p^1 \cdot \hat{x}_0 \\ p^1 \cdot \hat{y}_0 \\ p^1 \cdot \hat{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u\hat{x}_1 + v\hat{y}_1 + w\hat{z}_1) \cdot \hat{x}_0 \\ (u\hat{x}_1 + v\hat{y}_1 + w\hat{z}_1) \cdot \hat{y}_0 \\ (u\hat{x}_1 + v\hat{y}_1 + w\hat{z}_1) \cdot \hat{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_0 + v\hat{y}_1 \cdot \hat{x}_0 + w\hat{z}_1 \cdot \hat{x}_0 \\ u\hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 + v\hat{y}_1 \cdot \hat{y}_0 + w\hat{z}_1 \cdot \hat{y}_0 \\ u\hat{x}_1 \cdot \hat{z}_0 + v\hat{y}_1 \cdot \hat{z}_0 + w\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_0 & \hat{z}_1 \cdot \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \cdot \hat{y}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{z}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{z}_0 & \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_1^0 p^1$$

Obracanie wektora

- Jeszcze jedna interpretacja macierzy obrotu:
  - Obracanie wektora dookoła pewnej osi w ustalonym układzie współrzędnych
  - Np.: obróć v^0 dookoła y_0 o kąt $\pi/2$

$$v^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} v^1 &= R_{y,\pi/2} v^0 \\ &= \left. \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \right|_{\theta=\pi/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Podsumowanie macierzy obrotu

- Trzy interpretacje roli macierzy obrotu:
  1. Reprezentuje przekształcenie współrzędnych punktu w dwóch różnych układach odniesienia.
  2. Wyznacza orientację przekształconego układu współrzędnych w odniesieniu do ustalonego układu współrzędnych.
  3. Jest operatorem przekształcającym wektor p przez obrót w nowy wektor Rp w tym samym układzie współrzędnych.

Przekształcenia przez podobieństwo

- Wszystkie układy współrzędnych są zdefiniowane przez zbiór wektorów bazowych
  - Te rozpinają $\boldsymbol{R}^n$
  - Np. wektory jednostkowe *i*, *j*, *k*
- W algebrze liniowej, *n* x *n* macierz *A* stanowi odwzorowanie z $\boldsymbol{R}^n$ do $\boldsymbol{R}^n$
  - *y* = *Ax*, gdzie: *y* – obraz *x* poprzez przekształcenie *A.*
  - Myśl o *x* jak o liniowej kombinacji wektorów jednostkowych (wektorów bazwoych), np. wektorów jednostkowych

$$e_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}^T, \ldots, e_n = \begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}^T$$

  - Wtedy kolumny *A* są obrazami tych wektorów bazowych.
  - Jeśli chcemy reprezentować wektory względem innej bazy, np. $f_1, \ldots, f_n$, przekształcenie *A* można przedstawić w postaci

$$A' = T^{-1}AT$$

  - przy czym kolumny *T* są wektorami $f_1, \ldots, f_n$.

Przekształcenia przez podobieństwo

- *A'* oraz *A* mają identyczne wartości własne.
- Wektor własny *x* macierzy *A* odpowiada wektorowi wł. $T^{-1}x$ macierzy *A'*.
- Macierz obrotu stanowi również zmianę bazy
  - Jeśli *A* jest przekształceniem liniowym w o_0 oraz *B* jest przekształceniem liniowym w o_1, wtedy są one związane relacją

$$B = \left(R_1^0\right)^{-1} A R_1^0$$

- Np. układy o_0 oraz o_1 są związane macierzą obrotu

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Jeśli *A* jest też macierzą obrotu $R_{z,\theta}$ (względem o_0), ten sam obrót wyrażony w o_1 jest postaci

$$B = \left(R_1^0\right)^{-1} A R_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Składanie obrotów

- względem bieżącego układu współrzędnych
  - Np. rozważmy trzy układy współrzędnych o_0, o_1, o_2

$$\left.\begin{aligned} p^0 &= R_1^0 p^1 \\ p^1 &= R_2^1 p^2 \\ p^0 &= R_2^0 p^2 \end{aligned}\right\} p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 \longrightarrow R_2^0 = R_1^0 R_2^1$$

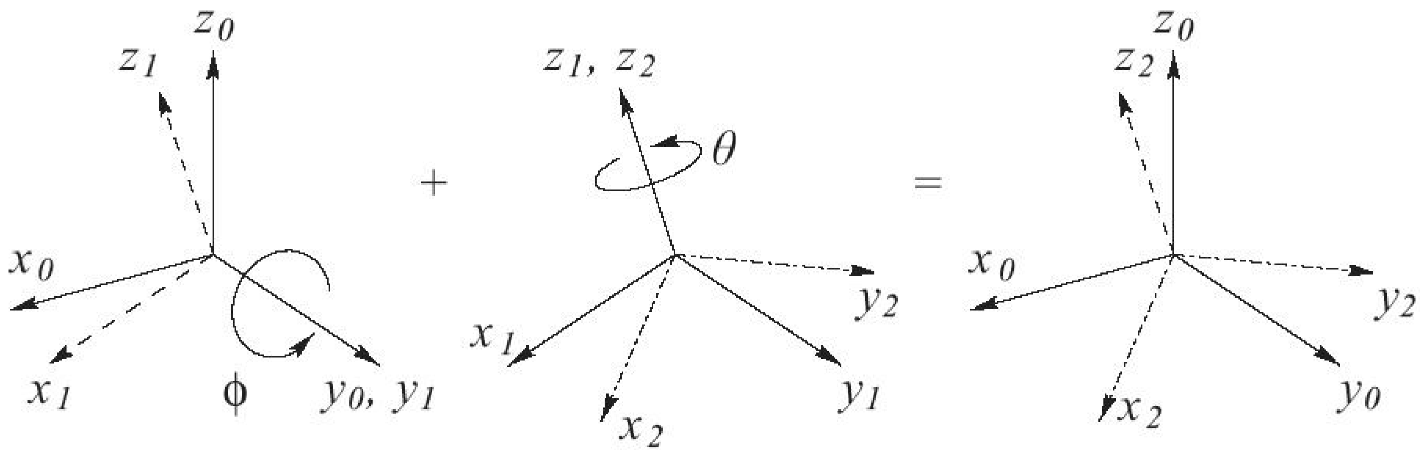
- To definiuje prawo składania dla kolejnych obrotów względem **bieżącego** układu współrzędnych: mnożenie prawostronne.

Składanie obrotów

- Np. niech R reprezentuje obrót względem bieżącej osi y o kąt ϕ, po którym następuje obrót o kąt θ względem bieżącej osi z.

$$R = R_{y,\phi} R_{z,\theta}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta & \sin\phi \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi \end{bmatrix}$$



- Co zrobić w przypadku odwróconej kolejności obrotów?

Składanie obrotów

- względem ustalonego układu współrzędnych (o_0)
  - Niech obrót pomiędzy układami o_0 oraz o_1 będzie zdefiniowany przez R_1^0
  - Niech R będzie zadanym obrotem względem ustalonego układu współrzędnych o_0.
  - Stosując definicję przekształcenia przez podobieństwo, mamy:

$$R_2^0 = R_1^0\left[\left(R_1^0\right)^{-1} R R_1^0\right] = R R_1^0$$

- Definiuje to prawo składania dla obrotów względem **ustalonego** układu współrzędnych: mnożenie lewostronne.

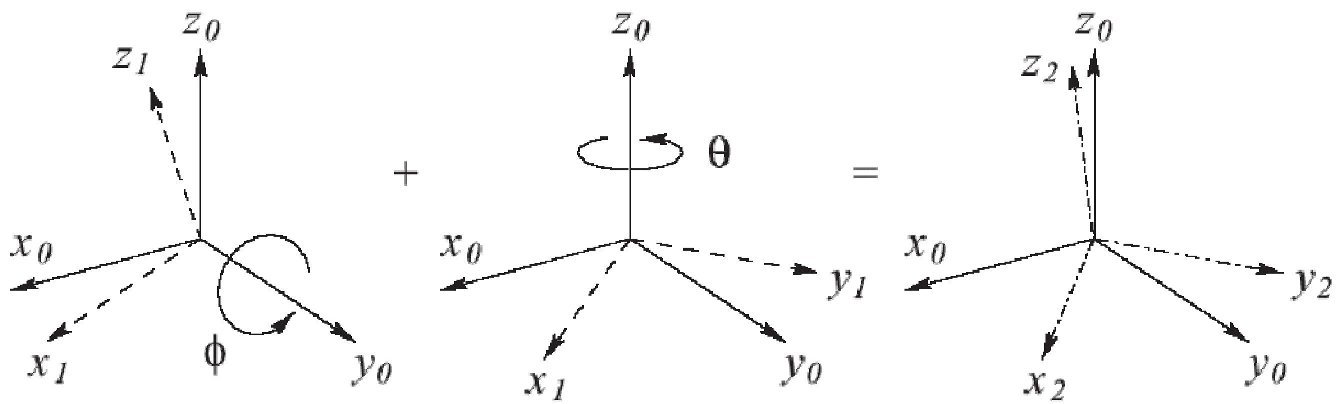
Składanie obrotów

- Np. chcemy wyznaczyć macierz obrotu *R,* która jest złożeniem obrotu o kąt ϕ względem y_0 ($R_{y,\phi}$), a następnie o kąt θ względem x_0 ($R_{x,\theta}$).
  - Drugi obrót należy sprowadzić do bazowego układu współrzędnych

$$R_2^0 = \left(R_{y,\theta}\right)^{-1} R_{z,\theta} R_{y,\theta}$$
$$= R_{y,-\theta} R_{z,\theta} R_{y,\theta}$$

  - Teraz kombinacją dwóch obrotów jest

$$R = R_{y,\phi}\left\lfloor R_{y,-\phi} R_{z,\theta} R_{y,\phi} \right\rfloor = R_{z,\theta} R_{y,\phi}$$



Składanie obrotów

- Podsumowanie:
  - Kolejne obroty względem bieżącego układu współrzędnych:
    - Mnożenie prawostronne przez kolejne macierze obrotu
  - względem ustalonego układu współrzędnych (o_0)
    - Mnożenie lewostronne przez kolejne macierze obrotu
  - Możemy również mieć do czynienia z hybrydowym składaniem obrotów względem bieżącego i ustalonego układu współrzędnych, stosując te same reguły.

Parametryzacja obrotów

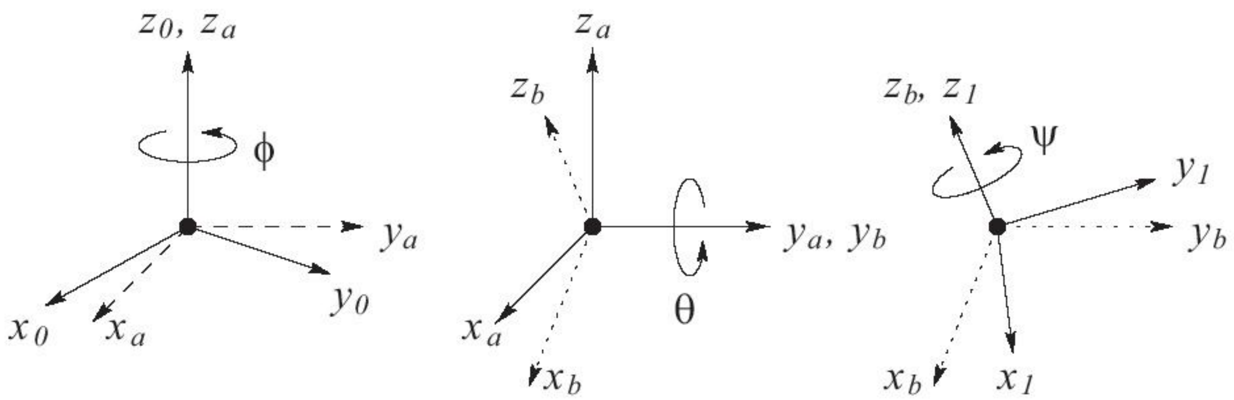
- Aby zdefiniować dowolny obrót ciała sztywnego, wystarczy użyć trzech parametrów.
  - Opiszemy trzy takie parametryzacje:
  1. **Kąty Euler**
  2. **Kąty obrotu, nachylenia i odchylenia**
  3. **Reprezentacja „oś–kąt”**

Parametryzacja obrotów

- **Kąty Euler**
  - Kolejno obrót o kąt ϕ wokół osi *z*, potem o kąt by θ wokół bieżącej osi *y*, i dalej o kąt ψ wokół bieżącej osi *z*

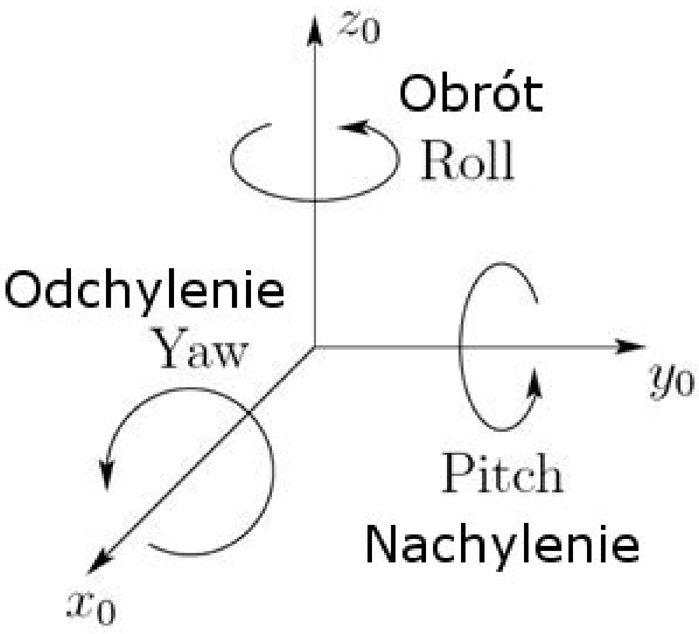
$$R_{ZYZ} = R_{z,\phi}R_{y,\theta}R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$



Parametryzacja obrotów

- **Kąty obrotu, nachylenia, odchylenia**
  - Trzy kolejne obroty względem ustalonych osi głównych:
    - Odchylenie – Yaw (x_0) ψ, nachylenie – pitch (y_0) θ, obrót – roll (z_0) ϕ



$$
\begin{aligned}
R_{XYZ} &= R_{z,\phi}R_{y,\theta}R_{x,\psi} \\
&= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Parametryzacja obrotów

- **Reprezentacja „oś–kąt”**
- – Każdą macierz z grupy SO(3) można przedstawić w postaci pojedynczego obrotu wokół odpowiedniej osi o odpowiedni kąt
- – Np. załóżmy, że mamy wektor jednostkowy:

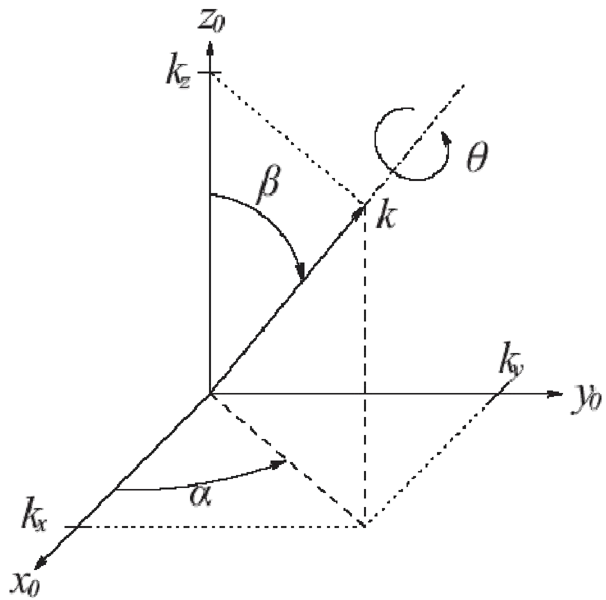
$$\hat{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

- – Mając dany kąt θ, chcemy znaleźć $R_{k,\theta}$:
  - Krok pośredni: zrzutuj oś z na k:

$$R_{k,\theta} = R R_{z,\theta} R^{-1}$$

  - przy czym obrót R jest zdefiniowany przez

$$R = R_{z,\alpha} R_{y,\beta}$$
$$\Rightarrow R_{k,\theta} = R_{z,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\theta} R_{y,-\beta} R_{z,-\alpha}$$



Parametryzacja obrotów

- **Reprezentacja „oś–kąt”**

– Jest dana przez

$$R_{k,\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix}$$

– Problem odwrotny:

  - Mając dane dowolne R, znaleźć k oraz θ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{Tr(R) - 1}{2}\right)$$

$$\hat{k} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Ruchy sztywne

- Ruch sztywny jest kombinacją czystego obrotu i czystego przesunięcia
  - Zdefiniowany przez macierz obrotu (*R*) oraz wektor przesunięcia (*d*)

$$R \in SO(3)$$

$$d \in \mathbf{R}^3$$

  - Grupa wszystkich ruchów sztywnych (*d*,*R*) znana jest jako grupa euklidesowa (*ang.* **Special Euclidean group)**, *SE*(3)

$$SE(3) = \mathbf{R}^n \times SO(3)$$

  - Rozważmy trzy układy, o_0, o_1, oraz o_2 razem z odpowiednimi macierzami obrotu R_2^1 oraz R_1^0
    - Niech d_2^1 będzie wektorem od początku o_1 do o_2, d_1^0 od o_0 do o_1
    - Dla punktu p^2 związanego z o_2, możemy przedstawić wektor położenia w układach o_0 and o_1:

$$\begin{aligned} p^1 &= R_2^1 p^2 + d_2^1 \\ p^0 &= R_1^0 p^1 + d_1^0 \\ &= R_1^0\left(R_2^1 p^2 + d_2^1\right) + d_1^0 \\ &= R_1^0 R_2^1 p^2 + R_1^0 d_2^1 + d_1^0 \end{aligned}$$

Przekształcenia jednorodne

- Ruchy sztywne (obroty i przesunięcia) można przedstawić za pomocą mnożenia macierzowego
  - Zdefiniujmy: $H_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & d_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$H_2^1 = \begin{bmatrix} R_2^1 & d_2^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Teraz punkt p_2 można przedstawić w układzie o_0: $P^0 = H_1^0 H_2^1 P^2$
  - gdzie P^0 oraz P^1 są postaci

$$P^0 = \begin{bmatrix} p^0 \\ 1 \end{bmatrix}, P^1 = \begin{bmatrix} p^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia jednorodne

- Mnożenie przez macierz *H* nazywa się **przekształceniem jednorodnym** i oznacza zapisem

$$H \in SE(3)$$

- Przekształcenie owrotne:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia jednorodne

- Podstawowe przekształcenia:
  - Trzy czyste przesunięcia, trzy czyste obroty

$$\mathbf{Trans}_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Rot}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Trans}_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Rot}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Trans}_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Rot}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$