Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

Laboratorium sterowania procesami ciągłymi

Podstawy analizy układów w przestrzeni stanów

1. Zapoznać się z następującymi poleceniami w środowisku Matlab:
   `series`, `parallel`, `feedback`, `cloop`, `append`, `blkbulid`, `connect`, `canon`, `ss`, `ssdata`, `tfdata`, `ssdelete`, `ssselect`, `ss2tf`, `tf2ss`, `minreal`, `eig`, `printsys`, `loopsens`.

   Jeśli jest to możliwe, użyj powyższych poleceń do implementacji rozwiazań ponższych zadań.

2. Rozważ układ opisany poniższymi równaniami:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \dot{y}_1 + 2y_1 + 3\dot{y}_2 + 4y_2 &= u_1 \\ \ddot{y}_2 + \dot{y}_2 + 2y_2 + 3\dot{y}_1 + 4y_1 &= u_2 \end{aligned}$$

   a następnie

   (a) znajdź jego reprezentację w przestrzeni stanów (przyjmując, że $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$, ect.);
   (b) wyznacz transmitancję układu oraz znajdź bieguny i zera układu;
   (c) określ stabilność układu.

3. Rozważ układ opisany poniższą transmitancją

$$G(s) = \frac{2(s+4)}{s(s+1)(s+2)}$$

   a następnie

   (a) wyznacz wszystkie postacie kanoniczne dla $G(s)$;
   (b) wyznacz diagonalną realizację $G(s)$;
   (c) określ stabilność układu.

4. Rozważ poniższą transmitancję

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^3(s+10)} & \frac{1}{s+10} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

   a następnie

   (a) wyznacz realizację $G(s)$ w przestrzeni stanów;
   (b) znadź bieguny i zera układu oraz określ jego stabilność.

5. Pokaż, że macierz systemowa połączenia równoległego dwóch układów, opisanych odpowiednio $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ i $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$, ma następującą postać

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ C_1 & C_2 & D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

6. Pokaż, że macierz systemowa układu, który reprezentuje połaczenie $S_1 = \{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ w torze sprzężenia zwrotnego z $S_2 = \{A_2, B_2, C_2, D_2\}$, ma postać

$$\begin{bmatrix} A_1 - B_1VD_2C_1 & -B_1VC_2 & B_1 - B_1VD_2D_1 \\ B_2WC_1 & A_2 - B_2D_1VC_2 & B_2WD_1 \\ WC_1 & -D_1VC_2 & WD_1 \end{bmatrix}$$

   gdzie

$$V = (I + D_2D_1)^{-1} \text{ i } W = (I + D_1D_2)^{-1}$$

7. Odwrotność układu jest definiowana w następujący sposób: jeśli $y = Gu$ to wtedy $u = G^{-1}y$. Jeśli układ o transmitancji G jest reprezentowany w przestrzeni stanów przez $\{A, B, C, D\}$ i zakładając, że G jest kwadratowe i macierz D nie jest osobliwa, pokaż że G^{-1} jest reprezentowane w przestrzeni stanów przez

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & -BD^{-1} \\ D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix}$$

8. Przyjmując, że transmitancje regulatora i obiektu to odpowiednio C(s) i G(s), zdefiniowane są poniższe transmitancje

   (a) transmitancja układu otwartego $L(s) = G(s)C(s)$
   (b) transmitancja toru sprzężenia zwrotnego $J(s) = 1 + L(s)$
   (c) transmitancja układu zamknietego $G_z(s) = \frac{L(s)}{J(s)}$
   (d) transmitancja uchybowa $S(s) = \frac{1}{J(s)} = J(s)^{-1}$
   (e) komplementarna transmitancja uchybowa $T(s) = \frac{L(s)}{J(s)}$

   Wyznacz reprezentację w przestrzeni stanów macierzy systemowej dla wszystkich powyższych transmitancji. Dodatkowo pokaż jak każdym przypadku wyzaczyć tą macierz w środowisku MATLAB.

9. Dany jest układ opisany następujacymi równaniami

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + \alpha u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

   Dla jakich warości parametru α układ ten jest sterowalny.

10. Rozważ układ 2-ego rzędu opisany w przestrzeni stanów nastepującymi równaniami

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

   Dla jakich wartości parametrów k_1, k_2 układ ten jest w pełni sterowalny.

11. Dany jest układ opisany następującymi równaniami.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

   Wyzancz warunek sterowalności tego układu.

12. Dany jest regulator PID którego transmitancja ma następującą postać

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + T_d s}$$

   Wykaż, że w przestrzeni stanów regulator ten może być opisany następującymi rówaniami

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{T_d} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{K_i}{T_d} \\ K_i - \frac{K_d}{T_d^2} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + \left(K_p + \frac{K_d}{T_d} \right) u \end{aligned}$$