

Projektowanie układów metodą sprzężenia od stanu - metoda przemieszczania biegunów

1. Obliczanie macierzy układu zamkniętego oraz sterownika

(a) Dany jest obiekt opisany w przestrzeni stanów następującymi równaniami

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} x$$

- Narysuj schemat blokowy obiektu używając jednego członu całkującego dla każdej zmiennej stanu.
- Wyznacz transmitancje układu korzystając z algebry macierzowej.
- Wyznacz wielomian charakterystyczny układu zamkniętego jeśli reguła sterownika to odpowiednio
 - i. $u = -[K_1 \ K_2]x$
 - ii. $u = Ky$

(b) Dla układu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Zaprojektuj statyczny sterownik od stanu tak aby spełnione były następujące wymagania jakościowe:

- współczynnik tłumienia układu zamkniętego $\zeta = 0.707$
- czas maksymalnego przeregulowania jest poniżej 3.14 [s]

Dokonaj weryfikacji wyników projektowania z użyciem środowiska MATLAB.

(c) Zaprojektuj statyczny sterownik od stanu dla poniższego układu tak aby przeregulowanie układu zamkniętego było mniejsze niż 25%, a czas regulacji (dla kryterium 1%) był poniżej 0.115 [s]

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Użyj polecenia **step** w środowisku MATLAB w celu weryfikacji wymagań jakościowych układu zamkniętego i dokonaj ewentualnych zmian wzmocnienia sterownika.

(d) Rozważ poniższy układ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

a następnie

- Zaprojektuj statyczny sterownik od stanu tak aby przeregulowanie układu zamkniętego było mniejsze niż 5%, a czas regulacji (dla kryterium 1%) był poniżej 4.6 [s].
- Użyj polecenia **step** w środowisku MATLAB w celu weryfikacji wymagań jakościowych układu zamkniętego i dokonaj ewentualnych zmian wzmocnienia sterownika.

(e) Rozważ układ o transmitancji

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

a następnie

- Zapisz układ równań które opisują powyższy układ w kanonicznej formie sterowalnej jako

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- Wyznacz macierzy sterownika

$$u = -[K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

tak aby bieguny układu zostały ułożone w $s_{1,2} = -2 \pm 2j$

- (f) Dane jest wahadło o częstotliwości ω_0 i jego opis w przestrzeni stanów równaniem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

- Bez pomocy komputera, wyznacz parametry sterownika (przy założeniu, że reguła sterowania dana jest następującym wzorem $u = Kx$), który pozwoli na przemieszczenie obu biegunów układu zamkniętego do położenia $-2\omega_0$.
- Wyznacz numerycznie parametry sterownika przy użyciu pakietu MATLAB (polecenia `place` lub `acker`) dla $\omega_0 = 1$.
- Narysuj odpowiedź układu zamkniętego na następujące warunki początkowe

$$\begin{aligned}x_1 &= 1.0 \\ x_2 &= 0.0\end{aligned}$$

WSKAZÓWKA: Dobierz odpowiednio wartości elementów macierzy C i D tak aby uzyskać na rysunku trajektorie x_1 oraz x_2 . Napisz odpowiedni skrypt w środowisku MATLAB. Użyj polecenia `initial`.

- (g) Zbadać właściwości układu otwartego, dla którego są dane następujące macierze opisu w przestrzeni stanów:

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & -0.01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1.4 & 9.8 & -0.02 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6.3 \\ 0 \\ 9.8 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1], D = 0 \quad (2)$$

- Zakładając położenie biegunów układu zamkniętego wyznacz macierze układu zamkniętego i zbadać jego właściwości. Wykorzystać instrukcje podane w skrypcie `sfeedback.m` (zawartość skryptu jest zaprezentowana).
- Wyznaczyć macierze układu zamkniętego dla innych wybranych położań biegunów układu zamkniętego.
- Wyznaczyć macierze układu zamkniętego przyjmując inne parametry obiektu.

- (h) Obliczanie transmitancji toru sprzężenia zwrotnego

- Dla obiektu, którego macierze modelu dane są w (2), wyznaczyć transmitancje:
 - układu otwartego,
 - toru sprzężenia zwrotnego,
 - układu zamkniętego.

Procedura projektowania została zapisana w skrypcie `sfeedbacktr.m`. Przed wywołaniem skryptu należy określić na podstawie charakterystyk układu otwartego wektory czasu t i pulsacji ω .

- Wyznaczyć powyższe transmitancje przyjmując inne rozmieszczenie biegunów.
- Wyznaczyć powyższe transmitancje przyjmując inne parametry obiektu.

2. Badanie wpływu położenia zer na parametry sterownika

Dany jest układ opisany w przestrzeni stanów następującymi macierzami

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ z_0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = 0$$

- Bez pomocy komputera, wyznacz równania określające parametry sterownika w taki sposób aby bieguny układu spełniały równanie $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ (czyli znajdowały się w punktach $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$) gdzie ω_n - częstotliwość drgań własnych i ζ - współczynnik tłumienia.
- Powtórz obliczenia w środowisku MATLAB przyjmując $z_0 = 2$, $\zeta = 0.5$ i $\omega_n = 2 \text{ rad/sec}$. Sprawdź wyniki obliczeń dla $z_0 = -2.99$. Co zaobserwowałeś?

WSKAZÓWKA: Skrypt MATLAB'a:

```

A=[-7 1; -12 0]; % macierz A (systemowa)
z0=2; % parametr z0
B=[1; -z0]; % macierz B (sterowania)
pc=roots([a b c]); % położenie biegunów. Dobierz parametry a, b i c
% tak aby odpowiadały one założeniu
% zeta=0.5 i omega_n=2 rad/sec
K=acker(A,B,pc); % wyznaczenie sterownika

```

Literatura:

1. Gene F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. - *Feedback Control of Dynamic Systems*. Prentice Hall, 4 edition, 2002
2. Kaczorek T. - *Teoria sterowania*, T.1, WNT Warszawa 1977.
3. Shahian B., Hassul M. - *Control System Design Using MATLAB*. Prentice Hall, New Jersey, 1993
4. *Control System Toolbox for Use with MATLAB*. User's Guide. MathWorks, 1992.

Skrypty Matlab'a

```

% SFEEDBK.M
% Projektowanie układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym od stanu
% metodą przemieszczania biegunów
% Program wymaga określenia macierzy a,b,c,d i wektora cp
% a,b,c,d - macierze opisu obiektu w przestrzeni stanów
% cp - wektor biegunów układu skorygowanego
% Obliczenie zer, biegunów i wzmocnienia obiektu

[zer,bieg,wzm]=ss2zp(a,b,c,d)

% Obliczenie wektora sprzężenia od stanu
% cp - wektor biegunów układu skorygowanego

k=place(a,b,cp);

% Rozszerzenie wektora wyjść o dodatkowe wyjścia w postaci wektora stanu

[ar,br,cr,dr]=augstate(a,b,c,d);

%Obliczenie macierzy układu zamkniętego ze sprzężeniem zwrotnym od stanu
% n - rząd obiektu

[az,bz,cz,dz]=feedback(ar,br,cr,dr,[],[],[],-k,1,[2:n]);

%SFEEDBTR
%Projektowanie układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym od stanu
%metodą przemieszczania biegunów
% Obliczanie transmitancji toru sprzężenia zwrotnego

%%% Program wymaga określenia macierzy a,b,c,d,cp,t i w

% a,b,c,d - opis obiektu
% cp - wektor biegunów układu skorygowanego
% t - wektor czasu dla odpowiedzi skokowej
% w - wektor pulsacji (skala logarytmiczna)

% Obliczenie wielomianów zer, biegunów i wzmocnienia obiektu
[bgk,zrk,wzk]=ss2zp(a,b,c,d) pause;
% Obliczenie wektora sprzężenia zwrotnego od stanu
k=place(a,b,cp) pause;
% Wygenerowanie logarytmicznych charakterystyk amplitudowej i fazowej
[mc,pc]=bode(a,b,k,0,1,w); pause;

```

```

% Wygenerowanie wykresu rozmieszczenia pierwiastków
figure(1); rlocus(a,b,k,0); pause;
% Macierze układu otwartego
ao=a; bo=b; co=k; do=0;

%% Obliczenie transmitancji kompensatora

% Obliczenie transmitancji obiektu  $G(s)=L(s)/M(s)$ 
[l,m]=ss2tf(a,b,c,d) pause;
% Obliczenie transmitancji układu otwartego  $G_o(s)=G(s)K(s)=L_o(s)/M_o(s)$ 
[lo,mo]=ss2tf(ao,bo,co,do) pause;
% Transmitancja kompensatora  $K(s)=L_k(s)/M_k(s)=G_o(s)/G(s)=L_o(s)M(s)/L(s)M_o(s)$ 

lk=conv(lo,m)
mk=conv(l,mo)
pause;
for I=1:length(lk)
    if lk(I)==0
        lk=lk(2:length(lk));
    end;
end;
for I=1:length(mk)
    if mk(I)==0
        mk=mk(2:length(mk));
    end;
end;
pause;
lk=lk
mk=mk
pause;
% Obliczenie realizacji minimalnej kompensatora (kasowanie zer i biegunów)

[lk,mk]=minreal(lk,mk)
pause;

% Obliczenie zer i biegunów kompensatora
[zk,bk,kk]=tf2zp(lk,mk) pause;

% Obliczenie macierzy układu zamkniętego
az=a-b*k; bz=b; cz=c; dz=d;

disp(' Zera i bieguny układu zamkniętego;')
[zc,bc,kc]=ss2zp(az,bz,cz,dz)

% Obliczenie wzmocnienia układu zamkniętego
dcc=dcgain(az,bz,cz,dz);

% Wygenerowanie odpowiedzi skokowej układu zamkniętego
hc=step(az,bz,cz,dz,1,t); pause;

% Znormalizowana odpowiedź skokowa
hcn=hc/dcc;
figure(2);
plot(t,hcn); pause;

% Obliczenie charakterystyk częstotliwościowych układu zamkniętego

figure(3);
bode(az,bz,cz,dz,1,w);

```

