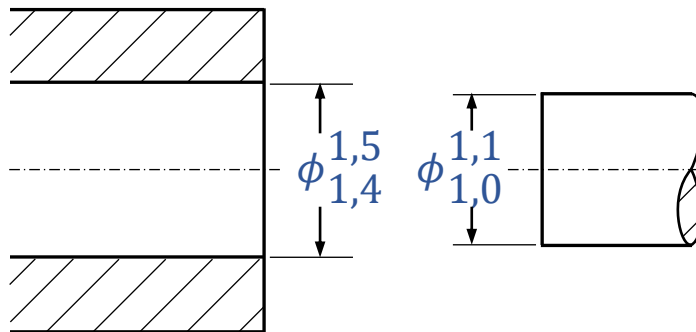


# Sterowanie jakością

## Zdolność procesu produkcyjnego

Zdolność a stabilność  
Wskaźniki zdolności



Materiały

<http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/>

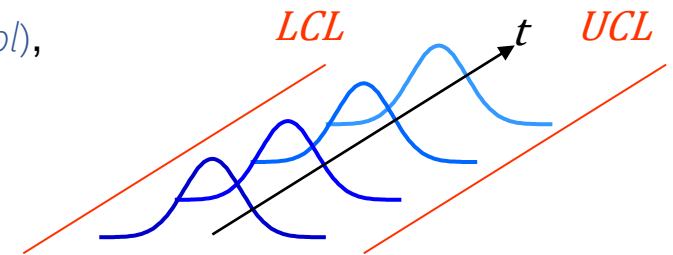
# Stabilność a zdolność procesu produkcyjnego

**Karty kontrolne** pozwalają ocenić czy monitorowany proces jest:

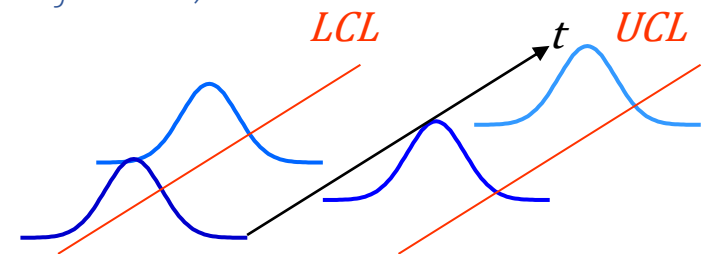
**stabilny** (przebiega pomiędzy granicami kontrolnymi),

**wycentrowany** (wartość średnia odpowiada, z akceptowalną dokładnością, nominalnej).

**Proces stabilny** to proces „pod kontrolą” (*ang. in control*),



**proces niestabilny** to proces „poza kontrolą” (*ang. out of control*).

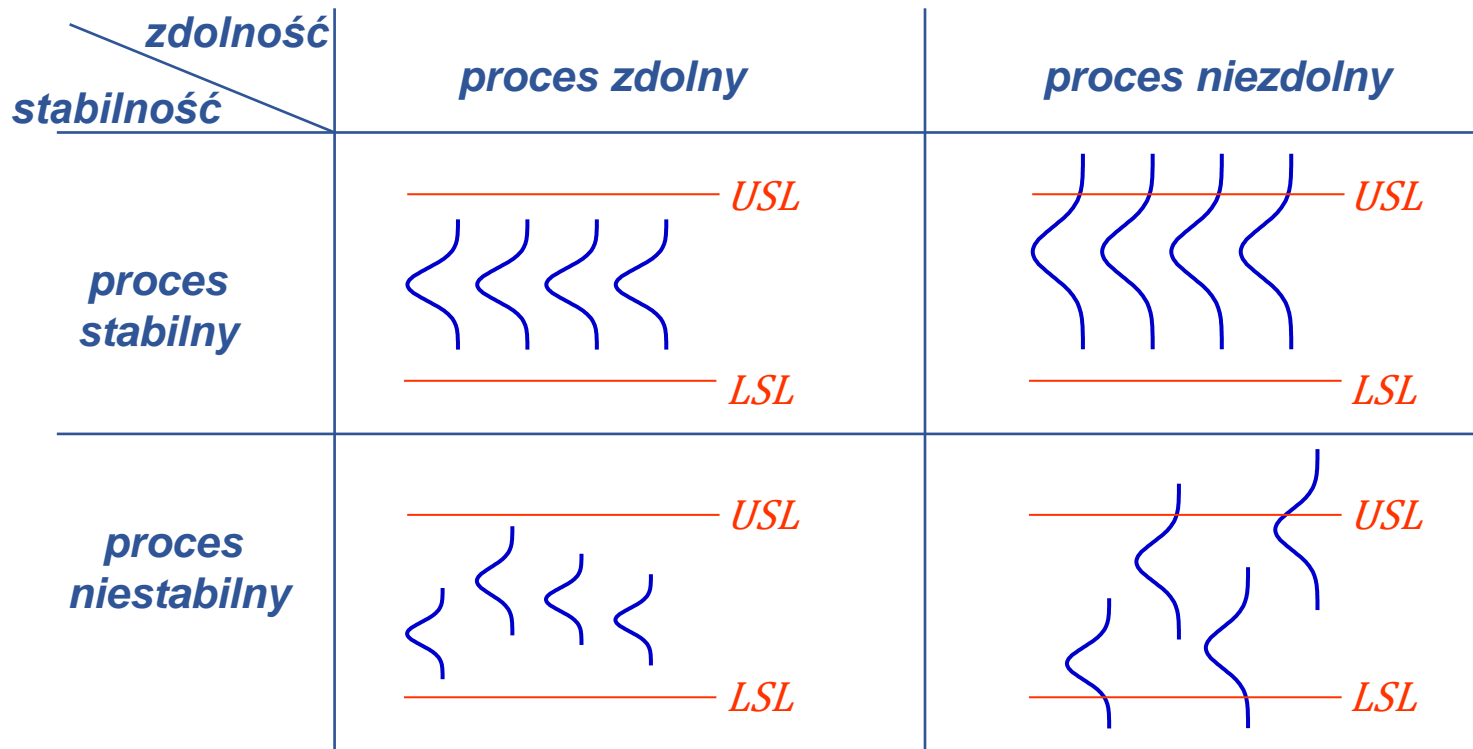


Proces, który jest jednocześnie **stabilny** i **wycentrowany** nazywany jest procesem **uregulowanym**.

**Karty kontrolne** umożliwiają analizę stabilności procesu, są wykorzystywane do monitorowania, diagnozowania i sterowania procesów.

# Stabilność a zdolność procesu produkcyjnego

**Zdolność procesu** jest cechą określającą stopień spełnienia przez proces wymogów specyfikacji. Proces zdolny to proces którego naturalna zmienność mieści się w granicach określonych w specyfikacji. Do oceny zdolności procesu wykorzystywanych jest szereg wskaźników:  $DPU$ ,  $PPM$ ,  $DPO$ ,  $DPMO$ ,  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $P_p$ ,  $P_{pk}$ , ...



$USL$ ,  $LSL$  – górna i dolna granica specyfikacji

(ang. *Upper Specification Limit, Lower Specification Limit*)

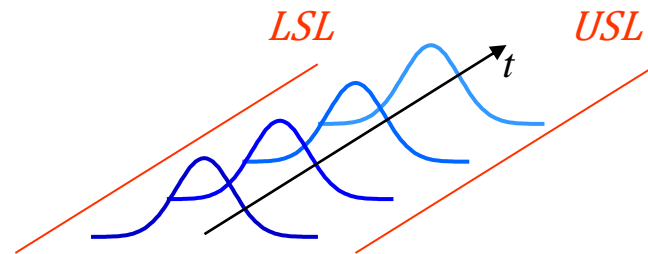
# Stabilność a zdolność procesu produkcyjnego

## Uwagi

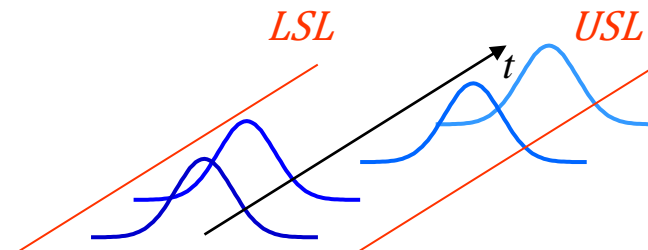
ocena **zdolności procesu** powinna być przeprowadzana wyłącznie dla **procesów stabilnych**,

wskaźniki zdolności procesu oceniają **aktualną** zdolność procesu,

**stabilność** procesu pozwala na przyjęcie założenia, że **przyszła** zdolność procesu będzie równa **aktualnej**,



przy **braku stabilności** nie można prognozować **przyszłej** zdolności procesu.



# Wskaźniki pomiaru niezgodności

Do oceny **zdolności procesu** mogą być wykorzystywane wskaźniki wykorzystujące liczbę **niezgodnych** sztuk lub liczbę **niezgodności** (**niezgodność** to niespełnienie wymagań, defekt, wada).

**Wadliwość, frakcja sztuk wadliwych** – liczba niezgodnych sztuk w przeliczeniu na sztukę

$$p = D_U / U$$

Wadliwość można wyrażać w:

- %, tzn. w przeliczeniu na 100 sztuk produktu (czasem % zastępowany jest oznaczeniem **pph** (*ang. parts per hundred*),
- ‰, tzn. w przeliczeniu na 1 000 sztuk produktu (czasem ‰ zastępowany jest oznaczeniem **ppt** (*ang. parts per thousand*),
- ppm, tzn. w przeliczeniu na 1 000 000 sztuk produktu (*ang. parts per million*)

**PPM** – liczba niezgodnych sztuk w przeliczeniu na milion sztuk produktu:

$$PPM = p \cdot 1000000 = D_U / U \cdot 1000000$$

$D_U$  – liczba niezgodnych sztuk (*ang. defective units*)

$U$  – liczba sztuk produktu (*ang. units*)

# Wskaźniki pomiaru niezgodności

**DPU** – liczba niezgodności w przeliczaniu na sztukę produktu (*ang. defects per unit*)

$$DPU = D / U$$

**DPO** – liczba niezgodności na możliwości ich wystąpienia (*ang. defects per opportunities*)

$$DPO = \frac{D}{U \cdot OP} = \frac{DPU}{OP} = \frac{D}{TOP}$$

**DPMO** – liczba niezgodności na milion możliwości ich wystąpienia

(*ang. defects per million opportunities*)

$$DPMO = DPO \cdot 1000000$$

**D** – liczba niezgodności (*ang. defects*), liczba niezgodności jest równa liczbie wszystkich znalezionych wad, liczba produktów niezgodnych w ogólnym przypadku nie jest równa liczbie niezgodności (pojedynczy produkt może mieć więcej niż jedną wadę)

**U** – liczba sztuk produktu (*ang. units*)

**OP** – liczba możliwości wystąpienia niezgodności w sztuce produktu (*ang. opportunities*)

**TOP** – całkowita liczba możliwości wystąpienia niezgodności (*ang. total opportunities*)

$$TOP = U \cdot OP.$$

# Wskaźniki pomiaru niezgodności

## Przykład 1.

Przebadano 10 detali kontrolując ich długość, średnice i twardość materiału. Wyznacz *frakcję sztuk wadliwych*, *PPM*, *DPU*, *DPO*, *DPMO* w oparciu o wyniki przeprowadzonej kontroli.

Detal	Długość	Średnica	Twardość	Wady
1	x			1
2				0
3			x	1
4				0
5	x	x		2
6		x		1
7				0
8				0
9	x	x	x	3
10			x	1

Razem niezgodnych 6

Razem niezgodności 9

liczba sztuk produktu  $U = 10$

liczba niezgodnych sztuk  $D_U = 6$

liczba niezgodności  $D = 9$

liczba możliwości wystąpienia  
niezgodności  $OP = 3$

$$p = D_U / U = 6 / 10 = 0,6$$

$$PPM = p \cdot 1000000 = 600000$$

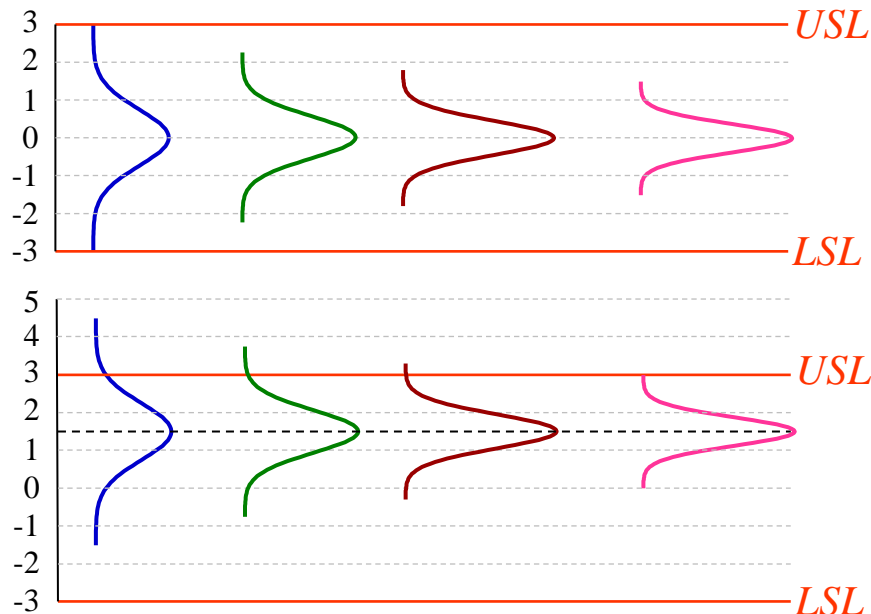
$$DPU = D / U = 9 / 10 = 0,9$$

$$DPO = DPU / OP = 0,9 / 3 = 0,3$$

$$DPMO = DPO \cdot 1000000 = 300000$$

# Poziom sigma – idea

**Poziom sigma** (ang. *sigma level*) – opisuje w jakiej odległości (wyrażonej w odchyleniach standardowych) od średniej procesu znajdują się granice specyfikacji, *poziom sigma* oznaczany jest także jako  $Z$  lub  $Z$ -score.



Poziom sigma:

- $Z = 3$  ( $\sigma = 1$ )
- $Z = 4$  ( $\sigma = 0,75$ )
- $Z = 5$  ( $\sigma = 0,6$ )
- $Z = 6$  ( $\sigma = 0,5$ )

Poziom sigma:

- $Z = 1,5$  ( $\sigma = 1$ )
- $Z = 2,0$  ( $\sigma = 0,75$ )
- $Z = 2,5$  ( $\sigma = 0,6$ )
- $Z = 3,0$  ( $\sigma = 0,5$ )

Przy obliczaniu *poziomu sigma* zgodnie z metodologią **Six Sigma** brane jest pod uwagę założenie, że z upływem czasu proces najprawdopodobniej ulegnie przesunięciu maksymalnie do  $1,5\sigma$ .  
Rozróżnia się dwa *poziomy sigma*:

**krótkoterminowy** (ang. *short term*)  $Z_{st}$  – wyznaczany jak powyżej i

**długoterminowy** (ang. *long term*)  $Z_{lt}$  – zmniejszony o współczynnik kompensacji  $Z_{shift}$  równy 1,5 (odpowiadający założonemu maksymalnemu przesunięciu procesu)



*Poziom sigma* liczony od:

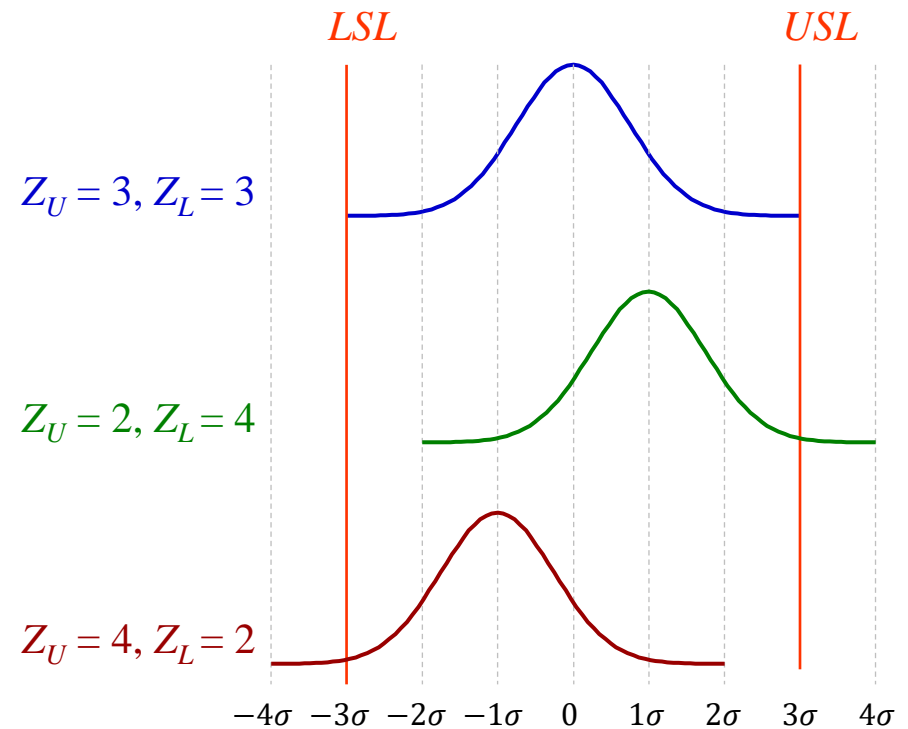
*USL* jest oznaczany jako  $Z_{USL}$  lub  $Z_U$

$$Z_U = \frac{USL - \mu}{\sigma}$$

*LSL* jest oznaczany jako  $Z_{LSL}$  lub  $Z_L$

$$Z_L = \frac{\mu - LSL}{\sigma}$$

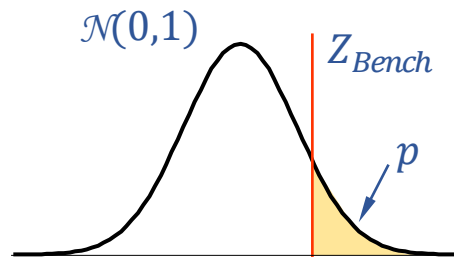
$\mu, \sigma$  – średnia i odchylenie standardowe procesu



$Z_{Bench}$  (ang. *benchmark*) – wskaźnik wzorcowy, wskaźnik pozwalający na porównanie zdolności analizowanych procesów, umożliwia ocenę odległości od średniej procesu do linii skonstruowanej w oparciu o prawdopodobieństwo  $p$  wystąpienia produktów *niezgodnych* (wadliwych, braków).

$Z_{Bench}$  to umowna górna granica specyfikacji (określona na podstawie rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(0,1)$ ) za którą znalazłyby się wszystkie produkty niezgodne.

$$Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - p)$$



# Prawdopodobieństwo wystąpienia niezgodności

Prawdopodobieństwo wystąpienia *niezgodności* można szacować na podstawie obserwowanej frakcji sztuk wadliwych lub frakcji niezgodności na liczbę możliwości ich wystąpienia:

$$p = \frac{D_U}{U} \qquad p = DPO = \frac{D}{U \cdot OP}$$

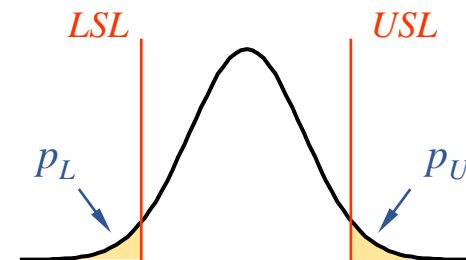
lub można je estymować znając rozkład prawdopodobieństwa analizowanego procesu

$$p = p_L + p_U = P(x < LSL) + P(x > USL) = F(LSL) + 1 - F(USL)$$

Dla procesu o rozkładzie normalnym, prawdopodobieństwo to można oszacować w oparciu o wartości  $Z_U$  i  $Z_L$

$$p = P(x < LSL) + P(x > USL) = \Phi(-Z_L) + \Phi(-Z_U) = 1 - \Phi(Z_L) + 1 - \Phi(Z_U)$$

$F$  – dystrybuanta rozkładu



**Przykład 2.** Wyznacz wartość wskaźnika  $Z_{Bench}$  dla procesów o:

a)  $Z_U = Z_L = 3$    b)  $Z_U = 2, Z_L = 4$    c)  $DPO = 0,01$ .

Prawdopodobieństwo wystąpienia produktów nie spełniających wymogów specyfikacji dla procesów a) i b) można oszacować znając ich rozkład prawdopodobieństwa. Zakładając, że rozkład ten jest zgodny z rozkładem normalnym, prawdopodobieństwa te wynoszą odpowiednio:

a)  $p = \Phi(-3) + \Phi(-3) = 0,0013 + 0,0013 = 0,0027$

b)  $p = \Phi(-4) + \Phi(-2) = 0,00003 + 0,02275 = 0,02278$

Dla procesu c) prawdopodobieństwo jest równe liczbie niezgodności na liczbę możliwości ich wystąpienia

c)  $p = 0,01$

Ostatecznie,  $Z_{Bench}$  wyznacza się jako:

a)  $Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - 0,0027) = 2,7822$

b)  $Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - 0,02278) = 1,9994$

c)  $Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - 0,01) = 2,3263$

# Szacowanie odchylenia standardowego procesu

Szacowanie odchylenia standardowego		
symbol	nazwa	wzór
$\sigma_{overall}$	sigma całkowita (ang. sigma overall)	$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
$\sigma_{within}$	sigma wewnątrzpróbkowa (ang. sigma within)	$\hat{\sigma}_{\bar{R}/d_2} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ $\hat{\sigma}_{\bar{s}/c_4} = \frac{\bar{s}}{c_4}$

Odchylenie standardowe przedstawia zmienność procesu, szacowanie przy pomocy:

$\sigma_{overall}$  przedstawia całkowitą zmienność analizowanych danych

$\sigma_{within}$  przedstawia średnią zmienność wewnątrz analizowanych próbek (przybliżenie wykorzystywane przy badaniu stabilności procesu z użyciem kart kontrolnych)

$$\text{Zmienność całkowita} = \text{Zmienność wewnątrzpróbkowa} + \text{Zmienność międzypróbkowa}$$

Zmienność **całkowita** odpowiada **wewnątrzpróbkowej** gdy **międzypróbkowa** jest mała.

$x_i$  – wynik  $i$ -tego pomiaru,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  – liczba wszystkich pomiarów

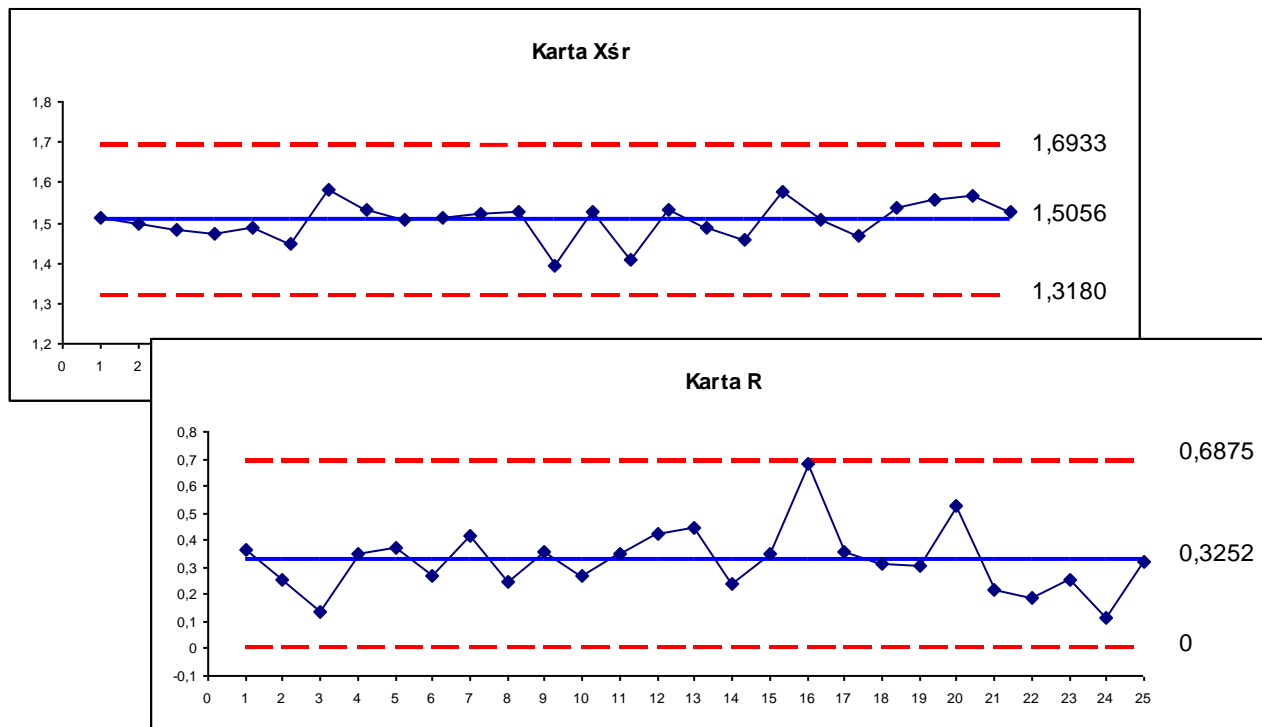
$\bar{R}, \bar{s}$  – wartość średnia z rozstępów i odchyłeń standardowych w próbkach

$d_2, c_4$  – współczynniki statystyczne zależne od rozmiaru próbki

# Ocena zdolności procesu

**Przykład 3.\*** W procesie fotolitografii co godzinę pobierano po 5 płytek do kontroli grubości warstwy fotorezystu. Wyniki 25 kolejnych kontroli zostały zebrane w tabeli. Biorąc pod uwagę specyfikację według której grubość warstwy fotorezystu powinna wynosić  $1,5 \pm 0,5$  mikronów, należy zbadać zdolność procesu do produkowania wyrobów spełniających wymagania klientów

nr	1	2	3	4	5
1	1,32	1,41	1,67	1,46	1,69
2	1,43	1,36	1,61	1,47	1,61
3	1,43	1,49	1,49	1,43	1,57
4	1,5	1,64	1,38	1,28	1,55
5	1,56	1,27	1,53	1,44	1,64
6	1,6	1,55	1,36	1,33	1,42
7	1,63	1,51	1,84	1,42	1,51
8	1,42	1,43	1,66	1,61	1,55
9	1,39	1,73	1,54	1,52	1,37
10	1,4	1,67	1,51	1,46	1,52
11	1,42	1,77	1,43	1,59	1,42
12	1,58	1,34	1,58	1,39	1,76
13	1,29	1,41	1,44	1,64	1,19
14	1,5	1,4	1,59	1,65	1,5
15	1,36	1,29	1,6	1,25	1,55
16	1,57	1,53	1,52	1,28	1,77
17	1,37	1,73	1,4	1,5	1,44
18	1,42	1,39	1,31	1,62	1,56
19	1,58	1,42	1,65	1,51	1,72
20	1,71	1,44	1,24	1,38	1,76
21	1,44	1,51	1,35	1,57	1,49
22	1,47	1,59	1,66	1,5	1,47
23	1,59	1,43	1,56	1,53	1,69
24	1,64	1,52	1,57	1,56	1,55
25	1,58	1,37	1,62	1,37	1,69



\*Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control*

## Przykład 3. cd.

Kontrola stabilności procesu z pomocą karty  $\bar{X} - R$  wykazała, że proces jest statystycznie **stabilny**. Dodatkowo, z analizy karty  $\bar{X}$  wynika, że proces jest **zdolny**:

obliczona średnia procesu: 1,5056 odpowiada, z akceptowalną dokładnością nominalnej  $T = 1,5$ ,

grubość mierzonej warstwy mieści się w granicach: [1,318, 1,6933],

a więc tym bardziej w granicach wynikających ze specyfikacji: [1,0, 2,0].

**Zdolność procesu** można ocenić wyznaczając wskaźniki  $Z_U$ ,  $Z_L$ ,  $Z_{Bench}$  lub estymując prawdopodobieństwo wystąpienia produktów niezgodnych. W każdym z wymienionych przypadków należy najpierw oszacować odchylenie standardowe procesu:

$$\hat{\sigma}_{overall} = \sqrt{2,0896/124} \approx 0,1298,$$

$$\hat{\sigma}_{within} = 0,3184/2,326 \approx 0,1369.$$

**Zmienność całkowita** jest w tym przypadku zbliżona do **zmienności wewnątrzpróbkowej** (zmienność międzypróbkowa jest niewielka).

## Przykład 3. cd.

Wskaźniki  $Z_U$ ,  $Z_L$ ,  $Z_{Bench}$  oraz *wadliwość* w oparciu o *sigmę całkowitą* albo o *sigmę wewnątrzpróbkową*.

Dla *sigmy całkowitej* ( $\hat{\sigma}_{overall} \approx 0,1298$ ) otrzymuje się odpowiednio:

$$Z_U = \frac{USL - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1,5056}{0,1298} \approx 3,80485 \qquad Z_L = \frac{\hat{\mu} - LSL}{\hat{\sigma}} = \frac{1,5056 - 1}{0,1298} \approx 3,89853$$

$$p = \Phi(-Z_L) + \Phi(-Z_U) = \Phi(-3,89853) + \Phi(-3,80485) \approx 0,00011933354$$

$$Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - p) = \Phi^{-1}(1 - 0,00011933354) \approx 3,67412$$

dla *sigmy wewnątrzpróbkowej* ( $\hat{\sigma}_{within} \approx 0,1369$ )

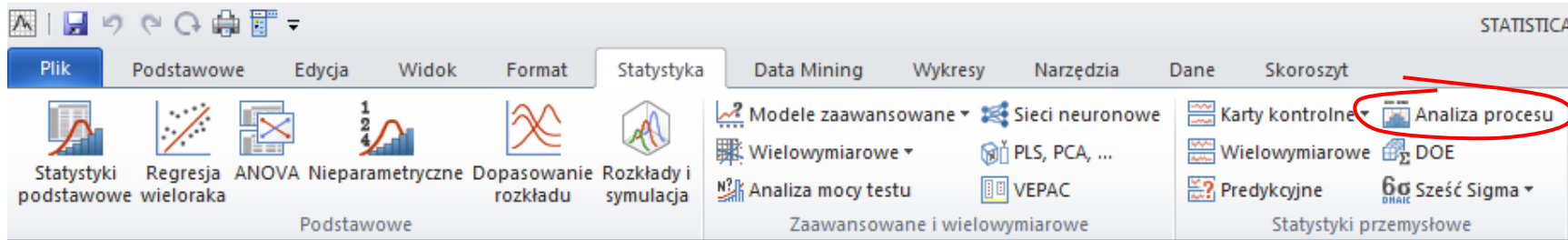
$$Z_U = \frac{USL - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1,5056}{0,1369} \approx 3,60811 \qquad Z_L = \frac{\hat{\mu} - LSL}{\hat{\sigma}} = \frac{1,5056 - 1}{0,1369} \approx 3,69694$$

$$p = \Phi(-Z_L) + \Phi(-Z_U) = \Phi(-3,69694) + \Phi(-3,60811) \approx 0,00026332311$$

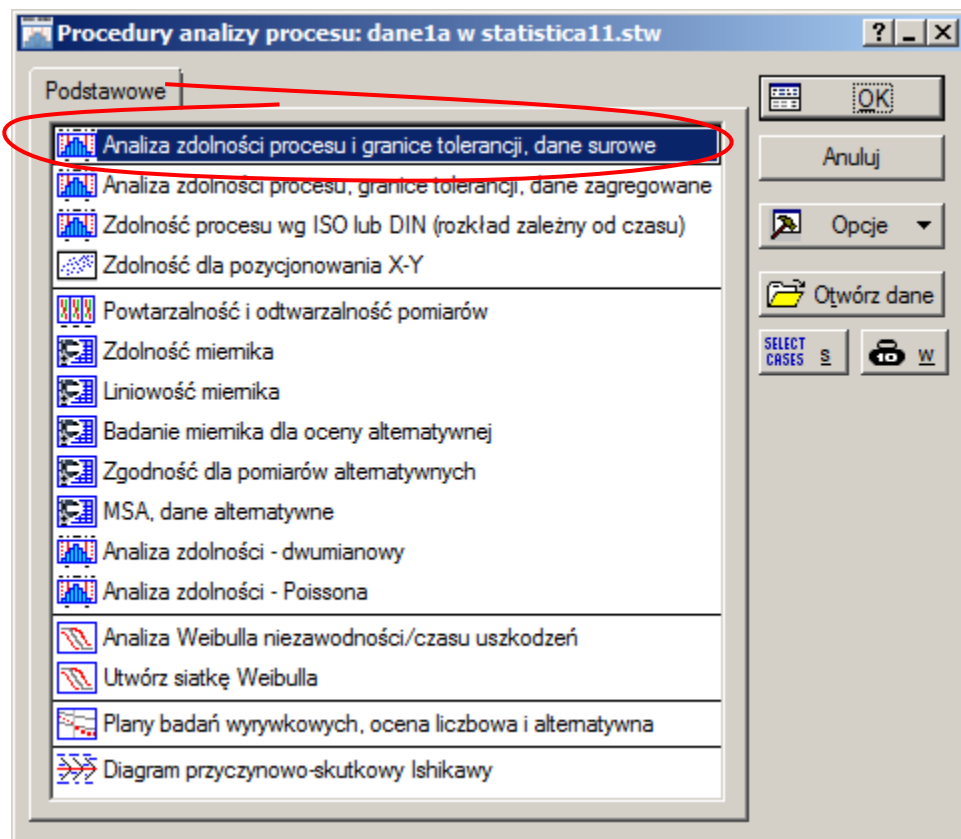
$$Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - p) = \Phi^{-1}(1 - 0,00026332311) \approx 3,46682$$



# STATISTICA – Ocena zdolności procesu



	1 próbka	2 grubość
1	1	1,32
2	1	1,41
3	1	1,67
4	1	1,46
5	1	1,69
6	2	1,43





# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

Analiza zdolności procesu: rozkład normalny i ogólny inny: dane1a w statistica11.stw

Zmienna: **grubość** Śred.: 1,50608

Razem N: 125 Całkowita sigma procesu: ,129813

Próbki: 25 N próbek: 5 Sigma-S wewnątrzpróbkowa: ,136892

UWAGA: Sigma-S wewn. próbki oszacowano z rozstępu (Rér./d2)

- $Z_{Bench}$
- $Z_L$
- $Z_U$
- $PPM=10^6 p$

$\sigma_{overall}$

$\sigma_{within}$

Zmienna << >> grubość Podsumowanie

Więcej, rozkład ogólny inny

Podstawowe

Rozkład normalny

**Podsum. bieżącej zmier**

Histogram podsumowuj

Rozkład inny niż normalny (dopas)

Podsum. bieżącej zmier

Inny niż normalny, l

statistica11.stw\* - Zdolność proc., Z standary...

Wsk. zdolności	Zdolność pr Zmienna: gr
	Wartość
Cp - dolna granica p.ufn.	1,0398
Cp - górna granica p.ufn.	1,3949
Cpk - dolna granica p.ufn.	1,0175
Cpk - górna granica p.ufn.	1,3879
Z - potencjalne	3,4668
Z - LSL	3,6969
Z - USL	3,6081
Z - dolna granica p.ufn.	1,8864
Z - górna granica p.ufn.	
Całkowita wydajność procesu	
PPM < LSL	109,1064
PPM > USL	154,2167
PPM całkowite	263,3231
Obserwowana wydajność procesu	
PPM < LSL	
PPM > USL	
PPM całkowite	
Cpm - dolna granica p.ufn.	1,1236
Cpm - górna granica p.ufn.	1,4411

na podst.  $\sigma_{overall}$

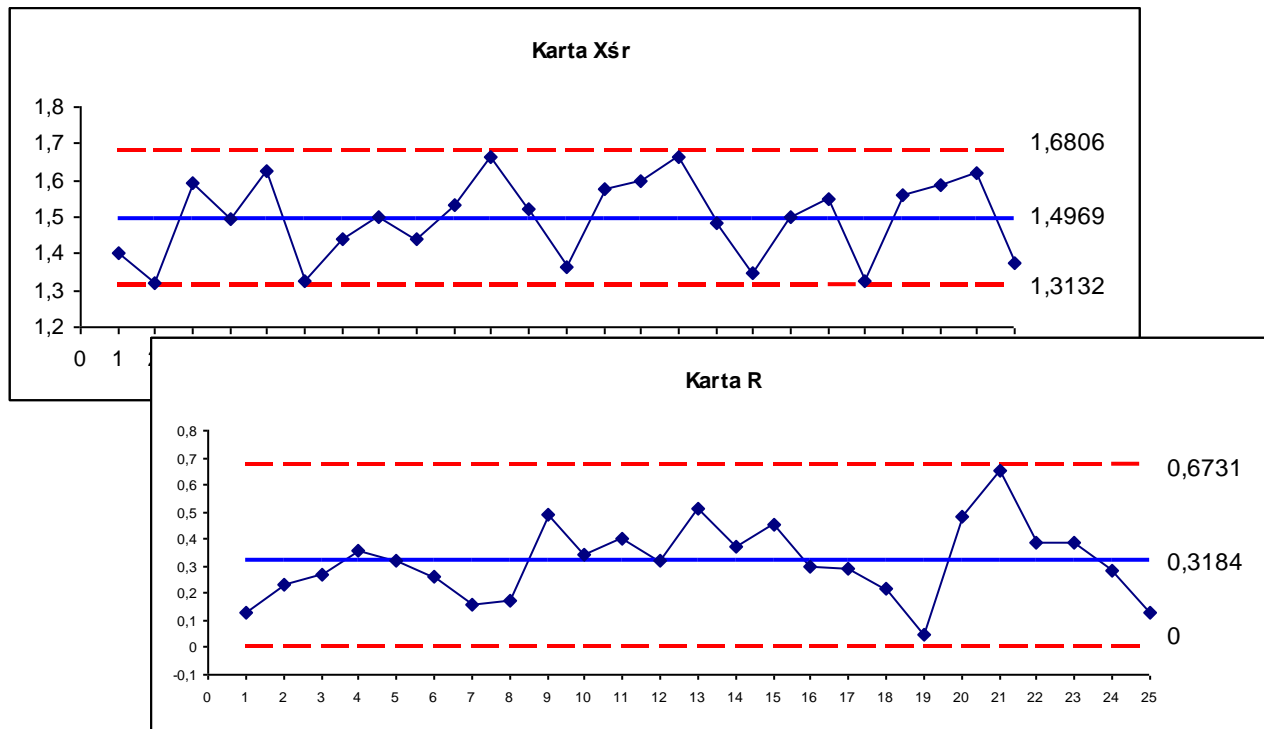
statistica11.stw - Zdolność proc., Z standar...

	Zdolność pr Zmienna: gr
	Wartość
Pp - dolna granica p.ufn.	1,1242
Pp - górna granica p.ufn.	1,4434
Ppk - dolna granica p.ufn.	1,1000
Ppk - górna granica p.ufn.	1,4366
Z - całkowite	3,6741
Z - LSL	3,8985
Z - USL	3,8049
Z - dolna granica p.ufn.	1,8908
Z - górna granica p.ufn.	
Potencjalna wydajność procesu	
PPM < LSL	48,3897
PPM > USL	70,9438
PPM całkowite	119,3335

na podst.  
 $\sigma_{within}$

# Ocena zdolności procesu

**Przykład 3. cd.** Załóżmy, że w przykładzie 3. zebrane zostały dane zebrane w tabeli obok. Należy zbadać zdolność procesu do produkowania wyrobów spełniających wymagania klientów, przy założeniu, że specyfikacja techniczna jest taka sama jak poprzednio.



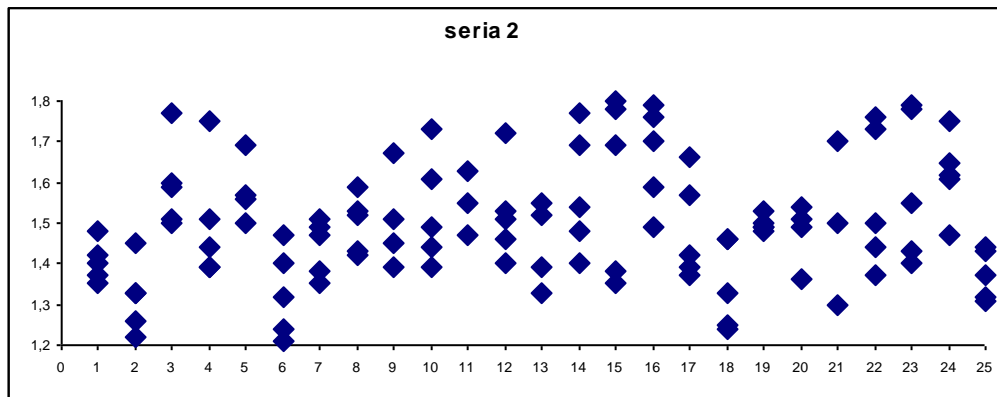
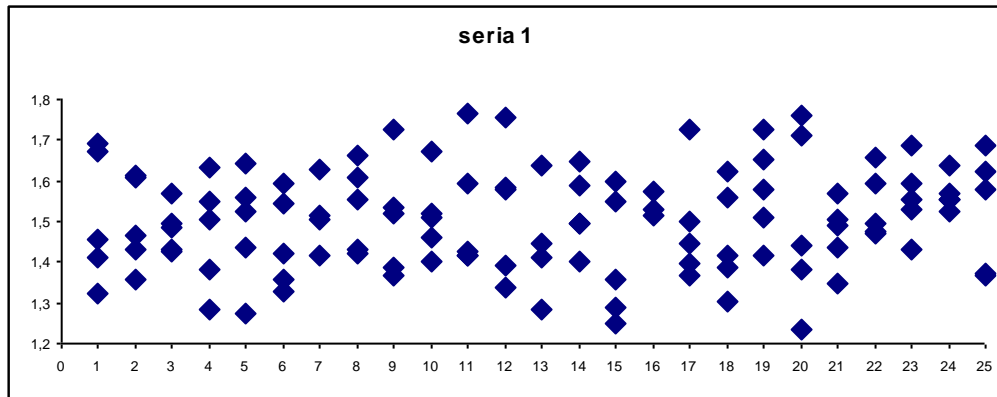
nr	1	2	3	4	5
1	1,35	1,42	1,37	1,4	1,48
2	1,22	1,33	1,33	1,45	1,26
3	1,6	1,59	1,77	1,5	1,51
4	1,44	1,75	1,39	1,51	1,39
5	1,69	1,82	1,57	1,56	1,5
6	1,24	1,21	1,47	1,4	1,32
7	1,49	1,47	1,51	1,38	1,35
8	1,59	1,52	1,53	1,42	1,43
9	1,18	1,51	1,67	1,39	1,45
10	1,39	1,61	1,73	1,44	1,49
11	1,55	1,87	1,81	1,47	1,63
12	1,4	1,72	1,46	1,51	1,53
13	1,04	1,33	1,55	1,52	1,39
14	1,48	1,69	1,4	1,54	1,77
15	1,38	1,8	1,35	1,69	1,78
16	1,7	1,76	1,79	1,49	1,59
17	1,57	1,39	1,66	1,37	1,42
18	1,46	1,25	1,46	1,33	1,24
19	1,48	1,49	1,49	1,5	1,53
20	1,36	1,51	1,84	1,49	1,54
21	1,7	1,3	1,05	1,08	1,5
22	1,44	1,5	1,76	1,73	1,37
23	1,43	1,79	1,4	1,78	1,55
24	1,62	1,75	1,61	1,47	1,65
25	1,43	1,44	1,37	1,31	1,32

Kontrola stabilności procesu z pomocą karty  $\bar{X} - R$  wykazała, tak jak poprzednio, że proces jest statystycznie *stabilny*.

**Przykład 3. cd.** Odchylenie standardowe procesu wynosi teraz:

$$\hat{\sigma}_{overall} = \sqrt{3,5451/124} \approx 0,1691, \quad \hat{\sigma}_{within} = 0,3184/2,326 \approx 0,1369.$$

*Zmienność wewnątrzpróbkowa* jest taka sama jak wcześniej, *zmienność całkowita* jest większa. Rozbieżność pomiędzy szacowanymi wartościami odchylenia standardowego wynika z dużej *zmienności międzypróbkowej*.



dla *sigmy całkowitej*:

$$Z_U \approx 2,9756 \quad Z_{Bench} \approx 2,7359$$
$$Z_L \approx 2,9387 \quad PPM \approx 3110,4339$$

dla *sigmy wewnątrzpróbkowej*:

$$Z_U \approx 3,6753 \quad Z_{Bench} \approx 3,4696$$
$$Z_L \approx 3,6297 \quad PPM \approx 260,6327$$

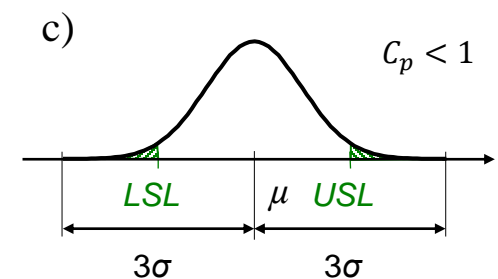
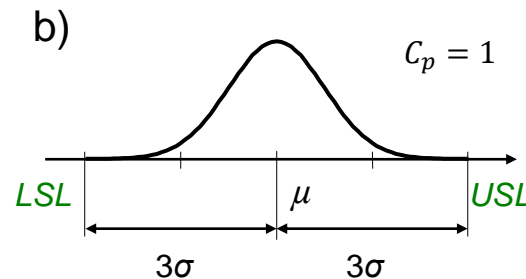
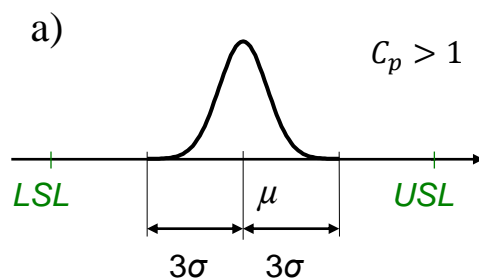
W 2.serii danych występują znacznie większe skoki wartości pomiędzy próbkami niż w 1. Rozbieżność wartości odchylenia standardowego wpływa na większe rozbieżności pomiędzy obliczonymi wskaźnikami.

$C_p$  – **wskaźnik zdolności (rozrzutu)**, wyznacza stosunek długości przedziału narzuconego przez specyfikację do naturalnej zmienności procesu równej  $6\sigma$  ( $3\sigma$  poniżej i  $3\sigma$  powyżej średniej):

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{Z_U + Z_L}{6}$$

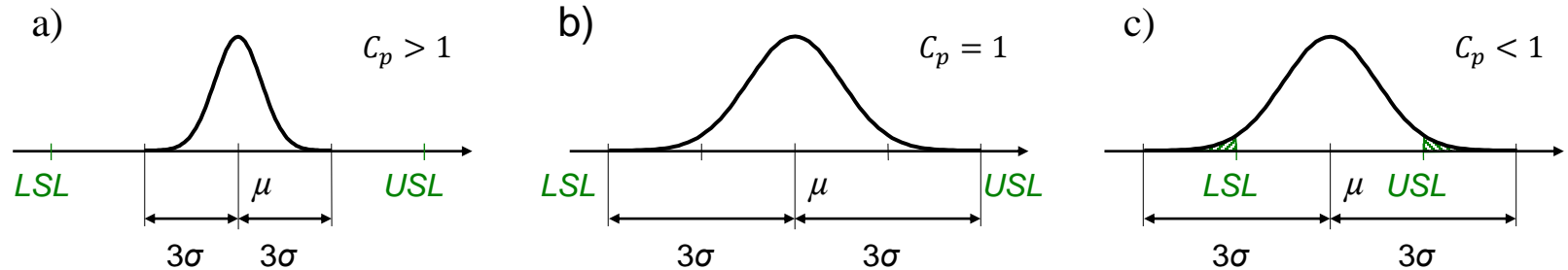
W zależności od ustalonych granic specyfikacji i naturalnej zmienności procesu możliwe są trzy przypadki. Granice specyfikacji:

- są szersze od przedziału naturalnej zmienności procesu  $C_p > 1$ ,
- pokrywają się z przedziałem naturalnej zmienności procesu  $C_p = 1$ ,
- znajdują się wewnątrz przedziału wyznaczonego przez naturalną zmienność procesu  $C_p < 1$ .

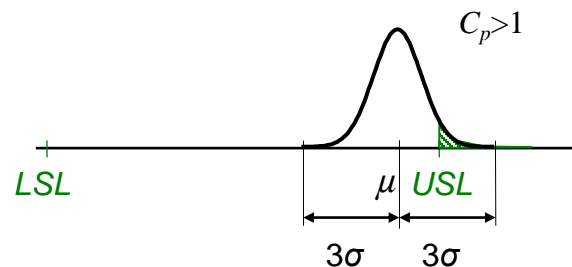


## Uwagi wskaźnik $C_p$

1. Żeby zapewnić małą liczbę elementów niezgodnych wartość wskaźnika powinna być większa od 1, na ogół wymaga się aby była większa od 1,33.



2. W przypadku procesu *niewycentrowanego* nawet duża wartość wskaźnika  $C_p$  nie zapewnia małej liczby elementów niezgodnych.



$C_r$  – **frakcja zdolności**, wyznacza stopień wykorzystania przedziału specyfikacji przez naturalną zmienność procesu:

$$C_r = \frac{1}{C_p}$$

Do wyznaczenia wartości wskaźnika  $C_p$  niezbędna jest dolna i górna granica specyfikacji, w przypadku procesów dla których tylko jedna z tych wartości jest określona stosowane są odpowiednio wskaźniki:

$C_{pu}$  – **górną zdolność procesu**, dla procesów z zadaną górną granicą specyfikacji:

$$C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma} = \frac{1}{3}Z_U$$

$C_{pl}$  – **dolną zdolność procesu**, dla procesów z zadaną dolną granicą specyfikacji:

$$C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} = \frac{1}{3}Z_L$$



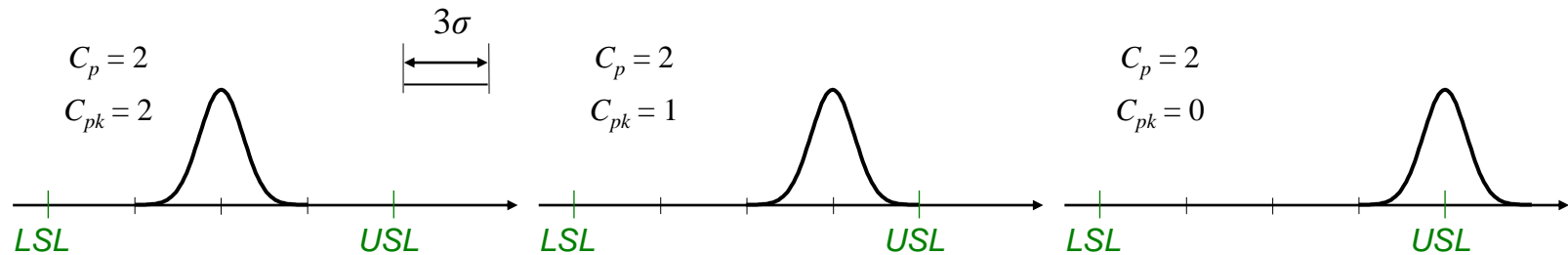
$C_{pk}$  – wskaźnik wycentrowania procesu:

$$C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\} = \frac{1}{3} \min\{Z_U, Z_L\}$$

## Własności $C_{pk}$

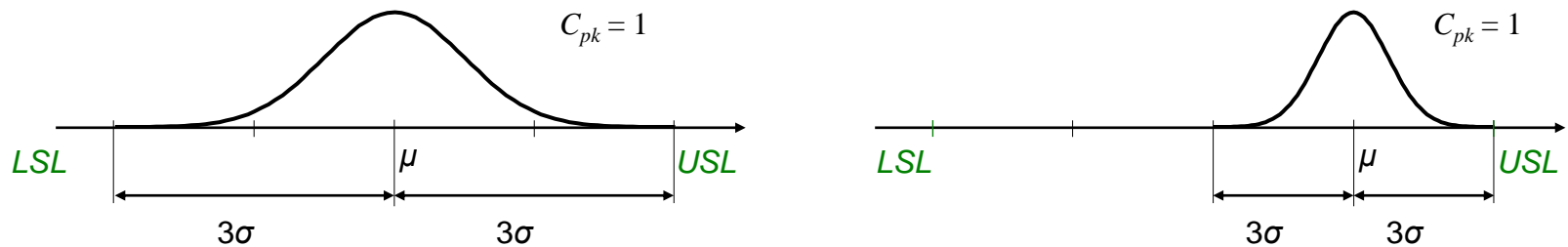
proces jest wycentrowany gdy  $C_{pk} = C_p$ ,

proces nie jest wycentrowany gdy  $C_{pk} < C_p$

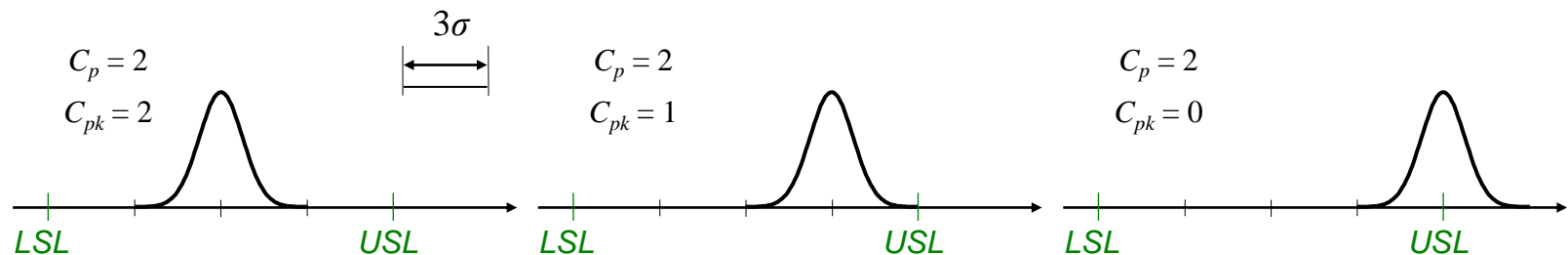


## Własności $C_{pk}$

wartość liczbowa wskaźnika  $C_{pk}$  nie określa położenia średniej wewnątrz przedziału specyfikacji



stopień wycentrowania procesu można określić tylko poprzez porównanie wartości  $C_{pk}$  z wartością wskaźnika  $C_p$

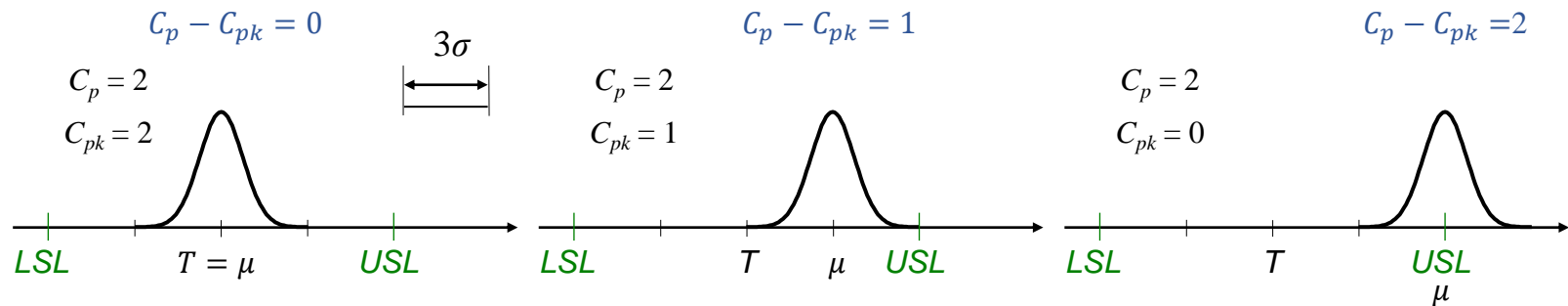


## Własności $C_{pk}$

odchylenie od wartości nominalnej

$$T = \frac{1}{2}(USL + LSL)$$

jest tym większe im większa jest różnica  $C_p - C_{pk}$



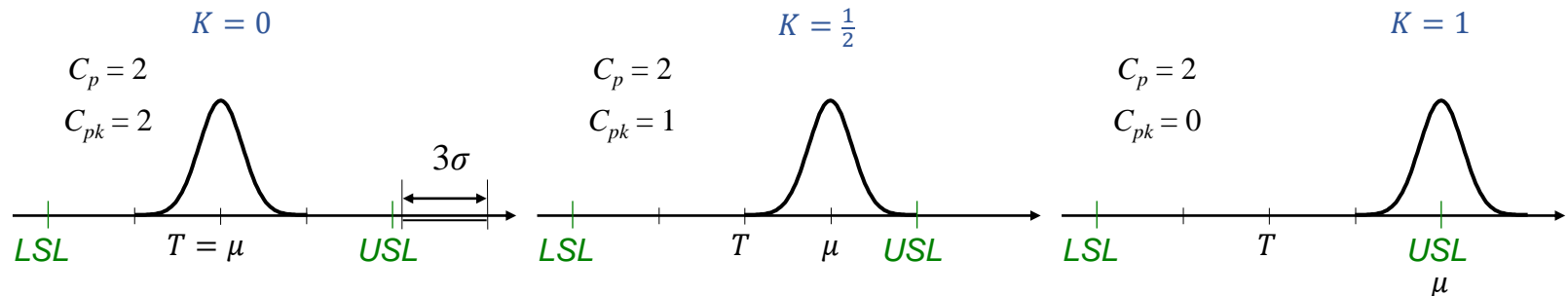
pokazuje się , że różnica ta wynosi:

$$C_p - C_{pk} = \frac{2|T - \mu|}{6\sigma}$$

## Własności $C_{pk}$

definiując współczynnik niewycentrowania  $K$

$$K = \frac{|T - \mu|}{\frac{1}{2}(USL - LSL)}$$



związek pomiędzy wskaźnikiem  $C_{pk}$  i wskaźnikiem  $C_p$  można 🔍 zapisać w postaci:

$$C_{pk} = C_p(1 - K)$$

różnica wartości obydwu wskaźników może być wyrażona w oparciu o wartość  $K$ :

$$C_p - C_{pk} = KC_p$$

$C_{pm}$  – **wskaźnik położenia procesu**, jest wyznaczany w oparciu o  $\tau$ , które jest miarą średniego odchylenia procesu od wartości nominalnej:

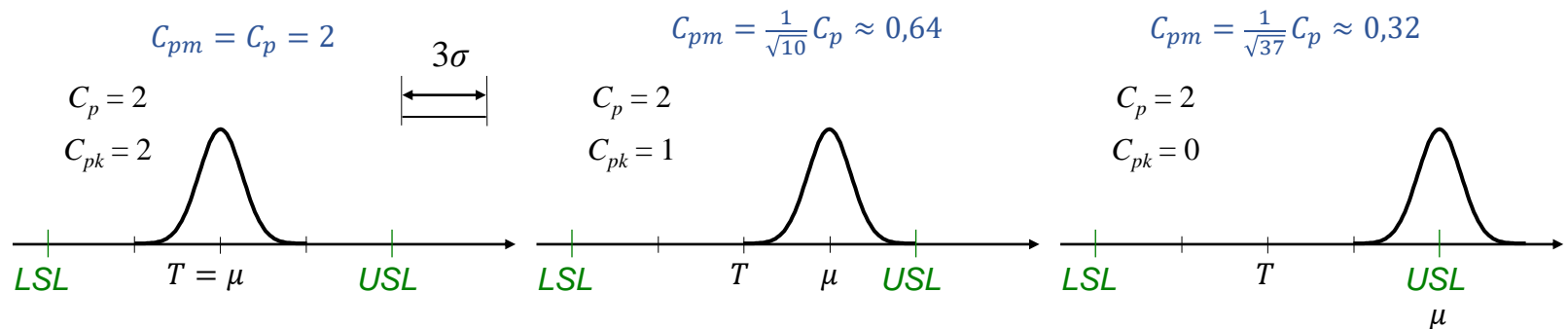
$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau}$$

pokazuje się 🔍, że  $\tau^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2$ , więc:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

po wprowadzeniu  $\xi = \frac{\mu - T}{\sigma}$ , wskaźnik można również zapisać w postaci:

$$C_{pm} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} C_p$$



## Własności $C_{pk}$ i $C_{pm}$

dla procesu wycelowanego

$$C_{pk} = C_{pm} = C_p$$

dla procesu niewycelowanego

$$C_{pk} < C_p \quad \text{oraz} \quad C_{pm} < C_p$$

jeśli  $\mu < LSL$  lub  $\mu > USL$

$$C_{pk} < 0 \quad \text{a} \quad C_{pm} \xrightarrow{|\mu-T| \rightarrow \infty} 0$$

dodatkowo pokazuje się, że dla  $C_{pm}$  spełniona jest nierówność

$$C_{pm} < \frac{USL - LSL}{6|\mu - T|}$$

można więc podać łatwy do interpretacji warunek konieczny zdolności procesu ( $C_{pm} \geq 1$ ):

$$|\mu - T| \leq \frac{1}{6}(USL - LSL)$$

# Ocena zdolności procesu – nieznanne $\sigma$

Jeśli  $\sigma$  procesu jest szacowana do oceny zdolności procesu wykorzystuje się:

- **wskaźniki zdolności** wyznaczane na podstawie odchylenia wewnątrzpróbkowego,
- **wskaźniki wykonania** wyznaczane na podstawie odchylenia całkowitego.

wskaźniki zdolności	wskaźniki wykonania
$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_{within}} \quad \hat{C}_r = \frac{1}{\hat{C}_p}$	$\hat{P}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_{overall}} \quad \hat{P}_r = \frac{1}{\hat{P}_p}$
$\hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{within}} \quad \hat{C}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}_{within}}$	$\hat{P}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{overall}} \quad \hat{P}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}_{overall}}$
$\hat{C}_{pk} = \min\{\hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu}\}$ $\hat{C}_{pk} = (1 - K)\hat{C}_p \quad K = \frac{ T - \mu }{\frac{1}{2}(USL - LSL)}$	$\hat{P}_{pk} = \min\{\hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu}\}$ $\hat{P}_{pk} = (1 - K)\hat{P}_p$
$\hat{C}_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\hat{\sigma}_{within}^2 + (\mu - T)^2}}$ $\hat{C}_{pm} = \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}} \hat{C}_p, \quad \hat{\xi} = \frac{\mu - T}{\sigma_{within}}$	

**Przykład 3. cd.** Wyznacz wskaźniki zdolności i wykonania dla pierwszej serii danych.

wskaźniki zdolności	wskaźniki wykonania
$\hat{C}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2-1}{6 \cdot 0,1369} \approx 1,2175$	$\hat{P}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2-1}{6 \cdot 0,1298} \approx 1,2839$
$\hat{C}_r = 1/\hat{C}_p \approx 0,8213$	$\hat{P}_r = 1/\hat{P}_p \approx 0,7789$
$\hat{C}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2-1,5061}{3 \cdot 0,1369} \approx 1,2027$	$\hat{P}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2-1,5061}{3 \cdot 0,1298} \approx 1,2683$
$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1,5061-1}{3 \cdot 0,1369} \approx 1,2324$	$\hat{P}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1,5061-1}{3 \cdot 0,1298} \approx 1,2995$
$\hat{C}_{pk} = \min\{\hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu}\} \approx 1,2027$	$\hat{P}_{pk} = \min\{\hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu}\} \approx 1,2683$
$\hat{\xi} = \frac{\mu-T}{\hat{\sigma}} = \frac{1,5061-1,5}{0,1369} \approx 0,0444$	
$\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1+\hat{\xi}^2}} = \frac{1,2175}{\sqrt{1+(0,0444)^2}} \approx 1,2163$	



**Przykład 3. cd.** Wyznacz wskaźniki zdolności i wykonania dla drugiej serii danych.

wskaźniki zdolności	wskaźniki wykonania
$\hat{C}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2-1}{6 \cdot 0,1369} \approx 1,2175$	$\hat{P}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2-1}{6 \cdot 0,1691} \approx 0,9857$
$\hat{C}_r = 1/\hat{C}_p \approx 0,8213$	$\hat{P}_r = 1/\hat{P}_p \approx 1,0145$
$\hat{C}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2-1,4969}{3 \cdot 0,1369} \approx 1,2251$	$\hat{P}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2-1,4969}{3 \cdot 0,1691} \approx 0,9919$
$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1,4969-1}{3 \cdot 0,1369} \approx 1,2099$	$\hat{P}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1,4969-1}{3 \cdot 0,1691} \approx 0,9796$
$\hat{C}_{pk} = \min\{\hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu}\} \approx 1,2099$	$\hat{P}_{pk} = \min\{\hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu}\} \approx 0,9796$
$\hat{\xi} = \frac{\mu-T}{\hat{\sigma}} = \frac{1,4969-1,5}{0,1369} \approx -0,0228$	
$\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1+\hat{\xi}^2}} = \frac{1,2175}{\sqrt{1+(-0,0228)^2}} \approx 1,2172$	

## Przykład 3. cd. Wnioski

### **pierwsza seria danych**

proces można uznać za *zdolny*: wskaźniki zdolności są większe od 1  
naturalna zmienność procesu wypełnia prawie w całości (około 82%,  $\hat{C}_r \approx 0,8213$ )  
założone przez specyfikację granice – wystąpienie nielosowej przyczyny specjalnej  
może szybko doprowadzić do przesunięcia procesu i w efekcie przyczynić się do  
powstania dużej liczby braków, na ogół wymaga się aby wartości wskaźników były  
większe od 1,33

### **druga seria danych**

ze względu na większą różnicę pomiędzy *odchyleniem wewnątrzpróbkowym* a  
*całkowitym*, różnice pomiędzy *wskaźnikami zdolności* i *wykonania* są większe  
*wskaźniki zdolności* są zbliżone do tych z pierwszej serii danych – proces może być  
więc uznany za *zdolny*

rozbieżność odpowiadających sobie *wskaźników zdolności* i *wykonania* wskazuje  
jednak, że proces charakteryzuje się dużą *zmiennością międzypróbkową*, która  
powoduje niestabilność średniej procesu, więc pomimo tego, że *wskaźniki zdolności*  
mają wartości wyższe od 1 proces wymaga korekty

# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

## Przykład 3. pierwsza seria danych

Analiza zdolności procesu: rozkład normalny i ogólny inny: dane1a w statistica11.stw

Zmienna: **grubość** Śred.: 1,50608  
 Razem N: 125 Całkowita sigma procesu: ,129813  
 Próbk: 25 N próbek: 5 Sigma-S wewnątrzpróbkowa: ,136892  
 UWAGA: Sigma-S wewn. próbki oszacowano z rozstępu (Rér./d2)

Zmienna << >> grubość Podsumowanie

Anuluj

Więcej, rozkład ogólny inny Granice tolerancji Opcje  
 Podstawowe Specyfikacja Więcej, rozkład normalny

Rozkład normalny

**Podsum. bieżącej zmiennej** Wszystkie zmienne

Histogram podsumowujący

Rozkład inny niż normalny (dopasowa...)

Podsum. bieżącej zmiennej

Inny niż normalny, histo...

UWAGA: Sigma wewnątrzpróbkowa służy do obliczania wskaźników zdolności (np. Cpk); służy

$\sigma_{overall}$   
 $\sigma_{within}$

na podst.  $\sigma_{overall}$

na podst.  
 $\sigma_{within}$

Wskaźnik	Wartość
<b>Dolna granica specyfik.</b>	1,000000
Specyfikacja nominalna	1,500000
<b>Górna granica specyfik.</b>	2,000000
CP (zdolność potencjalna)	1,217509
CR (frakcja zdolności)	0,821349
CPK (przedstaw. doskonałość)	1,202704
CPL dolny wskaźnik zdolności	1,232314
CPU górny wskaźnik zdolności	1,202704
K (niewycentrowanie)	0,012160
CPM (zdolność potenc. II)	1,282480

Wskaźnik	Wartość
<b>Dolna granica specyfik.</b>	1,000000
Specyfikacja nominalna	1,500000
<b>Górna granica specyfik.</b>	2,000000
PP (wskaźnik wykonania)	1,283897
PR (frakcja wykonania)	0,778879
PPK (przedst. dosk. wykonania)	1,268285
PPL dolny wskaźnik wykonania	1,299509
PPU górny wskaźnik wykonania	1,268285

# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

Karty kontrolne: dane1a w wykład\_08.stw

Otwórz plik ze specyfikacją karty

Podstawowe Liczbowe Alternatywne Aktualizacja

6 wykresów z kartami X-średnie i R  
6 wykresów z kartami X-średnie i S  
6 wykresów z kartami X i ruchomego R

**Karty X-średnie i R (ocena liczbowa)**

Karty X-średnie i S (ocena liczbowa)

Karty średniej ruchomej X-średnie i R

Karty średniej ruchomej X-średnie i S

Karty EWMA X-średnie i R

Karty EWMA X-średnie i S

Pojedyncze obserwacje i Rozstęp ruchomy

Karta CUSUM dla pojedynczych obserwacji

Analiza Pareto

Inne procedury sterowania jakością, jak wskaźniki zdolności procesu (Cp, Cpk, Pp, Ppk...) również dla rozkładów innych niż normalny, plany badań, planowanie doświadczeń (DOE) znajdują się w modułach Analiza procesu i Planowanie doświadczeń.

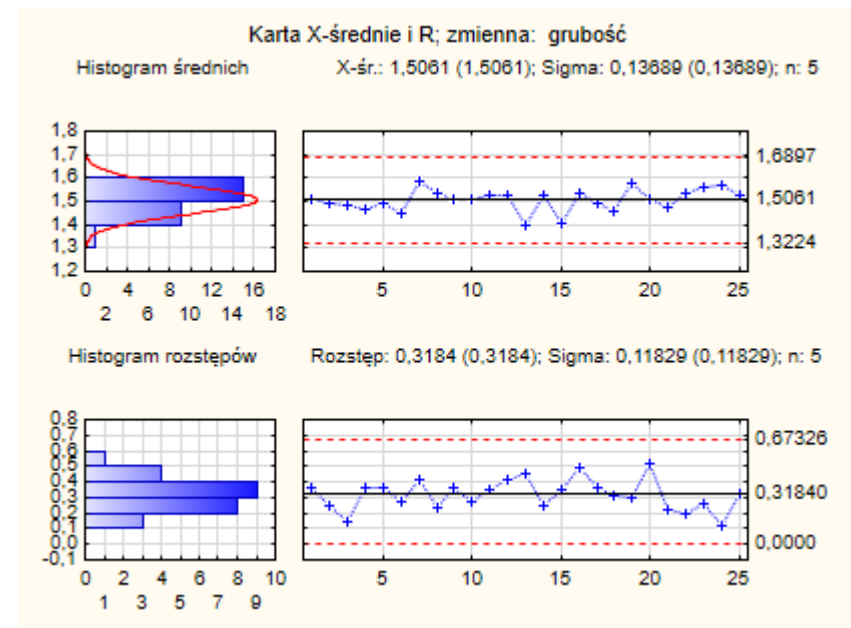
Otwórz dane

SELECT CASES

OK

Anuluj

Opcje



# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

Xśr./R: grubość: dane1a ... ?

Zbiory | Eksploracja | Niegaus. | Raport

Karty | **Specyf. X** | Specyf. R/S

Specyfikacje dla karty X

Zbiór << >> Ogół próbek (domyślny)

Linia centralna: Średnia procesu

Sigma: Obliczona

UCL: 3,0000

LCL: -3,0000

Linie ostrzegawcze

Jeżeli różne n: Użyj

Otwórz specyfikację

Linia średniej ruchomej

**Zdolność procesu** | Testy konfigur.

Opcje... | Zapisz jako... | Anuluj

Eksploruj... | Aktualizuj

Zabezpiecz

Grupami

Specyfikacja analizy zdolności: dane1a w wykład\_08.stw ?

Typ specyfikacji: Nominalna ± delta

Nominalna: 1,5 ± Delta: 0,5

OK (oblicz)

Ustaw i zamknij

Anuluj

Dolna granica specyfikacji (LSL):

Górna granica specyfikacji (USL):

Granice sigma procesu: 3

Dane: grubość; Ogół próbek (domyślny...)

Wskaźnik	Wartość
Wskaźnik zdolności	grubość; Ogół próbek (domyślny) -3,000 *Sigma / 3,000 *Sigma
Sigma wewn. próbki=Rśr./d2	1,000000
<b>Dolna granica specyfikacji</b>	<b>1,000000</b>
Wartość nominalna	1,500000
Górna granica specyfikacji	2,000000
CP potencjalna zdolność	1,217509
CR frakcja zdolności	0,821349
CPK wskaźnik wydajności	1,202704
CPL dolny wskaźnik zdolności	1,232314
CPU górny wskaźnik zdolności	1,202704
K niewycentrowanie	0,012160

Dane: grubość; Ogół próbek (domyślny...)

Wskaźnik	Wartość
Wskaźnik wykonania	grubość; Ogół próbek (domyślny) -3,000 *Sigma / 3,000 *Sigma
<b>Dolna granica specyfikacji</b>	<b>1,000000</b>
Wartość nominalna	1,500000
Górna granica specyfikacji	2,000000
PP (wskaźnik wykonania)	1,283897
PR (frakcja wykonania)	0,778879
PPK (przedst. dosk. wykonania)	1,268285
PPL dolny wskaźnik wykonania	1,299509
PPU górny wskaźnik wykonania	1,268285

**Przykład 4.\*** Parametry elementu według specyfikacji powinny wynosić:  $25,8 \pm 0,6$ . Wyniki kontroli z wykorzystaniem karty  $\bar{X} - R$  wykazały, że proces produkcji jest stabilny. Wyznacz wskaźniki zdolności procesu przyjmując, że:  $\bar{x} = 25,6$ ,  $\bar{R} = 0,2059$ ,  $n = 4$ .

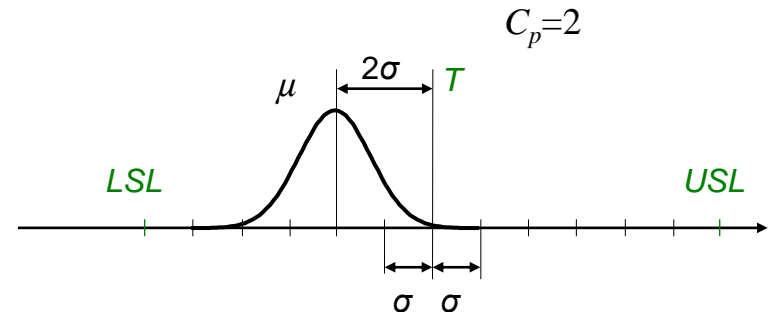
Zmienność procesu szacuje się jako:  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2(4)} = \frac{0,2059}{2,059} = 0,1$ .

**Wskaźniki zdolności:**

$$\hat{C}_p = 2 \quad \hat{C}_r = 0,5 \quad \hat{C}_{pu} \approx 2,6667$$

$$\hat{C}_{pk} = \hat{C}_{pl} \approx 1,3333 \quad \hat{C}_{pm} \approx 0,8944$$

$$\xi = \frac{25,6 - 25,8}{0,1} = -2$$



**Wnioski:**

wskaźniki  $\hat{C}_p, \hat{C}_{pk}$  osiągają zalecaną (wyższą od 1) wartość

proces nie jest wycentrowany  $\hat{C}_p \neq \hat{C}_{pk}$

średnia procesu znajduje się w odległości  $2\sigma$  od wartości nominalnej ( $\xi = -2$ ), co daje małą wartość  $\hat{C}_{pm}$  i powoduje, że elementy odległe o  $1\sigma$  od nominalnej pojawiają się tylko z prawdopodobieństwem  $0,16$  ( $p = \Phi(3) - \Phi(1) \approx 0,16$ )

\*Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control*

# Wskaźniki dla procesów o rozkładzie innym niż normalny

W przypadku wyznaczania *zdolności* procesu wprowadzono również specjalne *wskaźniki zdolności dla rozkładów innych niż normalny*. We wskaźnikach tych zamiast parametrów rozkładu normalnego  $\mu$  i  $\sigma$  wykorzystywane są kwantyle:  $q_{0,5}$ ,  $q_{0,00135}$  i  $q_{0,99865}$ .

W rozkładzie normalnym kwantyle  $q_{0,5}$ ,  $q_{0,00135}$  i  $q_{0,99865}$  wynoszą odpowiednio:

$$q_{0,00135} = \mu - 3\sigma$$

$$q_{0,5} = \mu$$

$$q_{0,99865} = \mu + 3\sigma$$

*Dowód*

$$P(x < \mu - 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(-3) = 0,00135$$

$$P(x < \mu + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) = 0,99865$$

$$P(x < \mu) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0}{\sigma}\right) = \Phi(0) = 0,5$$



# Wskaźniki dla procesów o rozkładzie innym niż normalny

Korzystając z zależności:

$$6\sigma = (\mu + 3\sigma) - (\mu - 3\sigma) = q_{0,99865} - q_{0,00135}$$

$$3\sigma = (\mu + 3\sigma) - \mu = q_{0,99865} - q_{0,5}$$

$$3\sigma = \mu - (\mu - 3\sigma) = q_{0,5} - q_{0,99865}$$

**wskaźniki zdolności** można zapisać w bardziej uniwersalnej postaci:

$$C_p(q) = \frac{USL - LSL}{q_{0,99865} - q_{0,00135}}$$

$$C_{pu}(q) = \frac{USL - q_{0,5}}{q_{0,99865} - q_{0,5}}$$

$$C_{pl}(q) = \frac{q_{0,5} - LSL}{q_{0,5} - q_{0,00135}}$$

$$C_{pm}(q) = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{q_{0,99865} - q_{0,00135}}{6}\right)^2 + (q_{0,5} - T)^2}}$$

lub

$$C_{pm}(q) = \frac{C_p(q)}{\sqrt{1 + \xi(q)^2}} \quad \xi(q) = 6 \frac{q_{0,5} - T}{q_{0,99865} - q_{0,00135}}$$



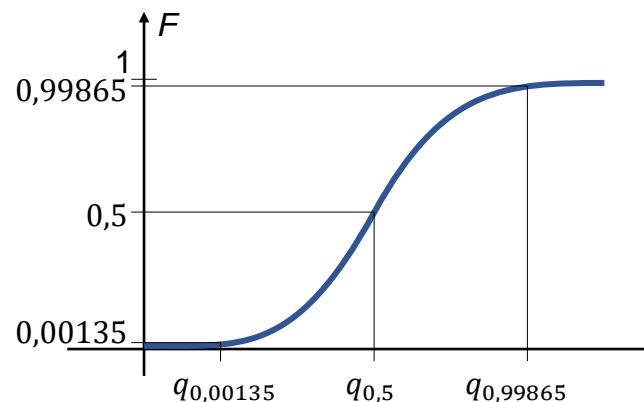
# Wskaźniki dla procesów o rozkładzie innym niż normalny

## Uwagi

dla rozkładu normalnego wskaźniki wyznaczone na podstawie kwantyli mają takie same wartości jak te wyznaczone na podstawie  $\mu$  i  $\sigma$

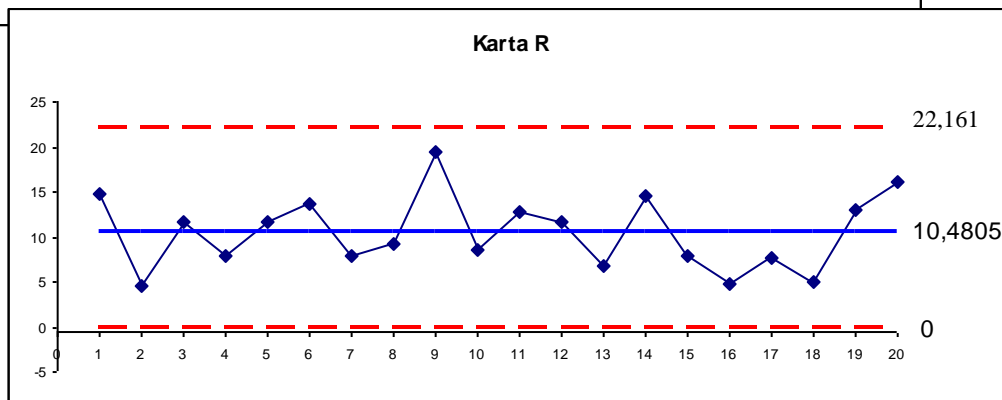
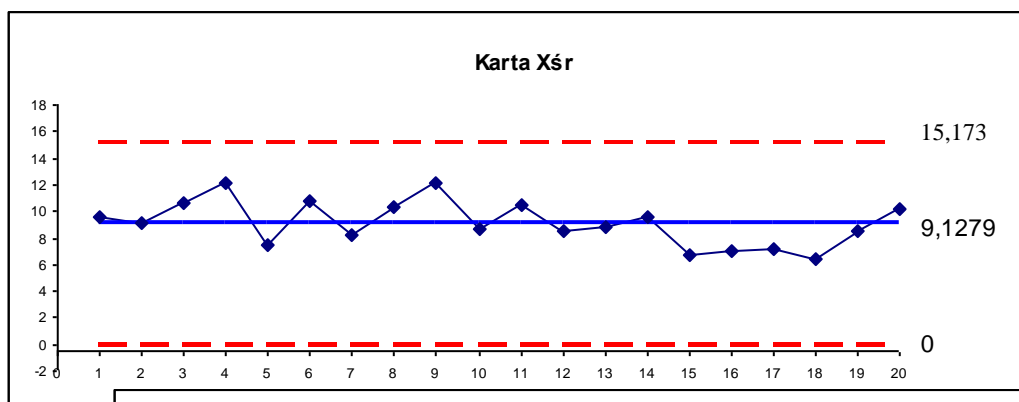
kwantyle rozkładów innych niż normalny wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty

- tego rozkładu jeśli rozkład jest znany
- rozkładu najlepiej dopasowanego jeśli rozkład jest nieznan, mogą być wykorzystywane:
  - konkretne rozkłady (wykładniczy, gamma, logarytmiczno-normalny, ...),
  - ogólne rodzin rozkładów takich jak krzywe Johnsona czy Pearsona



# Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

**Przykład 5.** Wylosowano 100 liczb z rozkładu *logarytmiczno normalnego* o parametrach  $\mu = 2$ ,  $\sigma = 0,5$ . Dane zostały podzielone na 20 5–elementowych grup. Założono normalność rozkładu i zbadano stabilność procesu.



nr	1	2	3	4	5
1	7,33	6,11	6,15	20,87	7,26
2	7,32	8,55	10,49	7,22	11,7
3	8,59	11,2	14,92	3,35	14,95
4	13,12	8,01	15,97	9,35	14,22
5	13,64	10,44	2	4,38	6,91
6	9,34	5,64	10,58	8,65	19,36
7	5,51	8,37	5,63	8,47	13,29
8	9,17	14,22	5,89	15,21	6,91
9	7,49	25,42	7,87	5,89	14,15
10	5,96	9,89	14,01	7,92	5,46
11	15,54	10,9	4,21	16,97	4,68
12	4,31	15,99	10,09	4,47	7,65
13	10,98	6,78	11,28	10,47	4,51
14	7,63	18,63	8,63	9,18	4,08
15	3,74	3,72	4,63	11,56	10,15
16	6,8	4,97	5,94	8,02	9,73
17	5,98	4,97	12,69	6,13	6,47
18	4,21	7,86	7,11	8,93	3,86
19	2,3	15,28	5,68	10,12	9,43
20	12,17	2,08	14,05	4,66	18,22

Karta  $\bar{X} - R$  pokazała, że proces jest statystycznie *stabilny*.

# Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

**Przykład 5. cd.** Zakładając, że zadana została górna granica specyfikacji  $USL = 25$ , wyznaczono wartości współczynników  $\hat{C}_{pu}$  i  $\hat{P}_{pu}$ :

$$\hat{\sigma}_{within} = \frac{\bar{R}}{d_2(5)} = \frac{10,4805}{2,326} \approx 4,5059$$

$$\hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{within}} = \frac{25 - 9,1279}{3 \cdot 4,5059} \approx 1,1742$$

$$\hat{\sigma}_{overall} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \approx 4,4795$$

$$\hat{P}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{overall}} = \frac{25 - 9,1279}{3 \cdot 4,4795} \approx 1,1811$$

Proces można uznać za **zdolny** – wartości *wskaźników zdolności* i *wykonania* są  $> 1$ . W celu sprawdzenia poprawności analizy porównano *wadliwość obserwowaną z szacowaną* dla rozkładu normalnego o  $\sigma = \hat{\sigma}_{within}$  i  $\sigma = \hat{\sigma}_{overall}$ :

$$p = 0,01 \quad (1 \text{ sztuka}^* \text{ ze } 100 \text{ nie spełnia wymogów specyfikacji})$$

$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu, \sigma_{within})}(USL) = 1 - \Phi\left(\frac{25 - 9,1279}{4,5059}\right) \approx 0,00021376$$

$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu, \sigma_{overall})}(USL) = 1 - \Phi\left(\frac{25 - 9,1279}{4,4795}\right) \approx 0,00019761$$

Rozbieżność pomiędzy obserwowaną a szacowaną wadliwością jest duża.

\* w tabeli zaznaczona na czerwono

# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

Procedury analizy procesu: dane3 w wykład\_08.stw

Podstawowe

Analiza zdolności procesu i granice tolerancji, dane3

Analiza zdolności procesu: dane surowe

Dane surowe | Grupowanie | Rozkład

Zmienne: 1

Specyfikacja: 2

Ocena sigmy według: Sigma wewnętrzna

Wybierz zmienne z pomiarami (i opcjonalną zmienną grupującą)

1 - pomiar

1 - pomiar

OK

Anuluj

[ Zestawy ]...

Wszystkie 2 zwiń Przybliż Wszystkie Rozwiń Przybliż

Zmienne do analizy: 1

Pokazuj tytuły

Wprowadź lub edytuj granice specyfikacji (dane3 w wykład\_08.stw)

Wprowadź lub edytuj granice specyfikacji (dane3 w wykład\_08.stw)

Podaj wartość nominalną i deltę dla Nom.±delta

Podaj NOM, LSL i USL dla niesymetrycznych specyfikacji.

Zmienna	Nominal.	delta	LSL	USL			
pomiar:				25			

OK Anuluj

# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

The image shows two overlapping windows of the Statistica software interface for process capability analysis. The top window is partially obscured by the bottom window. Both windows show the 'Grupowanie' (Grouping) tab. The variable 'pomiar' is selected. The specification is 'Nomin. = --- Góma=25,0000'. The sigma estimation method is 'Sigma wewnątrzpróbkowa z rozstępu (Rsr./d2)'. In the bottom window, the 'Grupowanie w próbki' (Grouping in samples) section has three radio buttons: 'Bez grupowania (jedna próbka)' (unselected), 'Stala liczność próbek:' (selected and circled in red), and 'Zmienna grupująca: brak' (unselected). The 'Stala liczność próbek:' option has a text box containing the number '5'. To the right of this section, there is a text box with the instruction: 'Wybierz zmienną grupującą lub podaj licznosc próbek dla obliczenia wskaźników zdolności procesu.' Below this, the 'Estymacja sigmy wg' (Sigma estimation by) section has three radio buttons: 'Rozstępów' (selected), 'Odchylen standard.' (unselected), and 'Wariancji' (unselected). The bottom window also has a 'Grupami' (By groups) button at the bottom right.

# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

**Analiza zdolności procesu: rozkład normalny**

Zmienna: pomiar      Średnia: 1,17416  
Razem 1 próbek

Próbki: 20      N próbek: 20  
UWAGA: Sigma-S wewn. próbek

Zmienna << >> pomiar

Więcej, rozkład ogólny inny

**Podstawowe**      Specyfikacja

Rozkład normalny

Podsum. bieżącej zmiennej

Histogram podsumowujący

Dane: Zmienna: (dane3 w wykład\_08.stw...)

Wsk. zdolności	
Dolna granica specyfik.	
Specyfikacja nominalna	
Górna granica specyfik.	
CP (zdolność potencjalna)	
CR (frakcja zdolności)	
CPK (przedstaw. doskonałość)	1,17416
CPL dolny wskaźnik zdolności	
CPU górny wskaźnik zdolności	1,17416
K (niewycentrowanie)	
CPM (zdolność potenc. II)	

Dane: Zdolność proc., Z standaryz., gran...  
Zmienna: pomiar

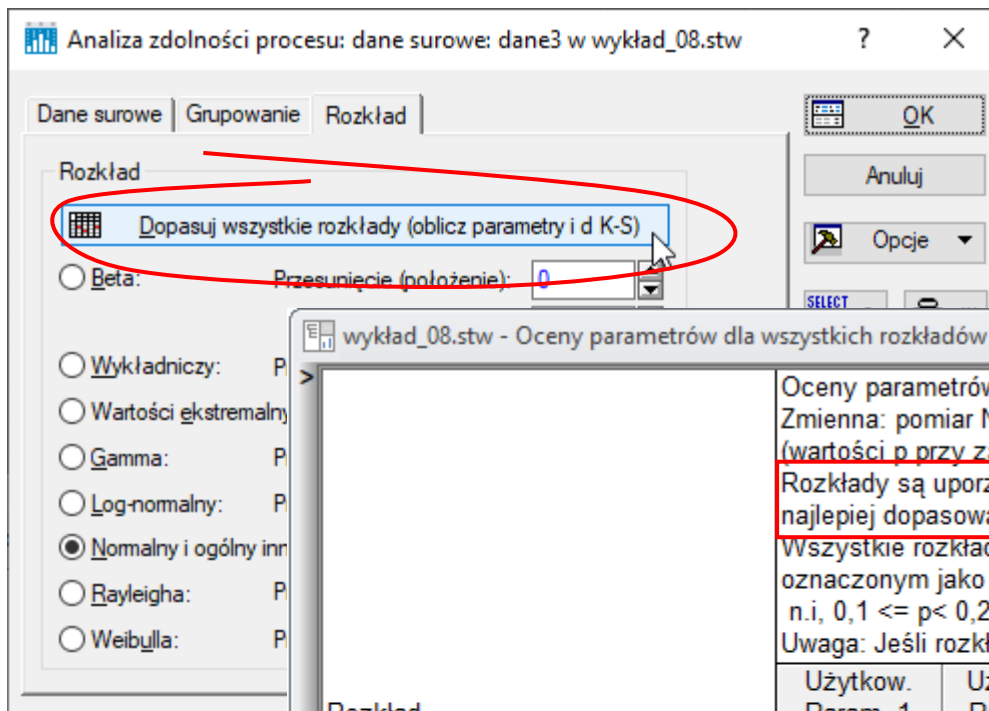
Wsk. zdolności	Zdolność proc.
Cp - dolna granica p.ufn.	
Cp - górna granica p.ufn.	
Cpk - dolna granica p.ufn.	0,97
Cpk - górna granica p.ufn.	1,38
Z - potencjalne	3,52
Z - LSL	
Z - USL	3,52
Z - dolna granica p.ufn.	1,79
Z - górna granica p.ufn.	
Całkowita wydajność procesu	
PPM < LSL	
PPM > USL	213,76
PPM całkowite	213,76
Obserwowana wydajność procesu	
PPM < LSL	
PPM > USL	10000,00
PPM całkowite	10000,00
Cpm - dolna granica p.ufn.	
Cpm - górna granica p.ufn.	

Dane: Zdolność proc., Z standaryz., gran...  
Zmienna: pomiar

Wsk. zdolności	Zdolność proc.
Pp - dolna granica p.ufn.	
Pp - górna granica p.ufn.	
Ppk - dolna granica p.ufn.	1,0041
Ppk - górna granica p.ufn.	1,3581
Z - całkowite	3,5433
Z - LSL	
Z - USL	3,5433
Z - dolna granica p.ufn.	1,7913
Z - górna granica p.ufn.	
Potencjalna wydajność procesu	
PPM < LSL	
PPM > USL	197,6110
PPM całkowite	197,6110

Zakładając, że rozkład cechy jest normalny, proces może być uznany za **zdolny** ale założeniu o normalności przeczy **rozbieżność** między wydajnością obserwowaną a szacowaną

# STATISTICA – Ocena zdolności procesu



znacznie lepsze dopasowanie otrzymano dla:

- rozkładu logarytmiczno-normalnego
- odpowiednio dopasowanych krzywych Johnsona

Oceny parametrów dla wszystkich rozkładów (dane3 w wykład\_08.stw)  
 Zmienna: pomiar N = 100  
 (wartości p przy założeniu znajomości parametrów a priori)

Rozkłady są uporządkowane wg dobroci dopasowania do danych (u góry są najlepiej dopasowane).

Wszystkie rozkłady z poziomem p testu Kołmogorowa-Smirnowa oznaczonym jako (w kolejności od najlepszej do najgorszej) n.i, 0,1 <= p < 0,2 lub 0,5 <= p < 0,1 są dobrymi modelami danych.  
 Uwaga: Jeśli rozkład normalny pasuje do danych, to należy go użyć.

Rozkład	Użytkow. Param. 1	Użytkow. Param. 2	Param. 1	Param. 2	d K-S	K-S p
Inny niż normalny (skośność, kurtoza)			0,96298	0,986958	0,039228	n.i.
<b>Log-normalny (próg, skala, kształt)</b>	0,00		<b>2,09084</b>	<b>0,507140</b>	0,040462	n.i.
Gamma( próg, skala, kształt)	0,00		2,11817	4,309330	0,047150	n.i.
Wartości ekstrem.(położenie, skala)			7,10492	3,432991	0,054763	n.i.
Weibulla (próg, skala, kształt)	0,00		10,34115	2,180504	0,067895	n.i.
Rayleigha (próg, skala)	0,00		7,18276		0,085509	n.i.
Normalny (położenie, skala)			9,12790	4,479527	0,102481	n.i.
Wykładniczy (próg, skala)	0,00		9,12790		0,294716	p<,01
Beta (próg, sigma, kształt, kształt)	0,00	1,000000				--

rozkład dopasowany krzywymi Johnsona

# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

Analiza zdolności procesu: rozkład normalny i ogólny inny: dane3 w wykład\_08.stw

Zmienna: pomiar Śred.: 9,12790  
 Razem N: 100 Całkowita sigma procesu: 4,47953  
 Próbkki: 20 N próbek: 5 Sigma-S wewnątrzpróbkowa: 4,50594  
 UWAGA: Sigma-S wewn. próbki oszacowano z rozstępu (Rśr./d2)

Zmienna << >> pomiar Podsumowanie

Anuluj

Więcej, rozkład ogólny inny Granice tolerancji Opcje

**Podstawowe** Specyfikacja Więcej, rozkład normalny

Opcje

Grupami

UWAGA: Sigma wewnątrzpróbkowa służy do obliczania

Rozkład normalny

Podsum. bieżącej zmiennej Wszystkie zmienne

Histogram podsumowujący

**Rozkład inny niż normalny (dopasowanie Pearsona i Johnsona)**

Podsum. bieżącej zmiennej Wszystkie zmienne

Inny niż normalny, histogram podsumowujący

Przyjmując, że rozkład cechy nie jest normalny, proces **nie może** być uznany za **zdolny**

Dane: Zmienna: (dane3 w wykład\_08.stw)\* (3 zm. \* 12 prz.)

	Zmienna: (dane3 w wykład_08.stw) +3,000 *Sigma=22,6457		
Wsk. zdolności	Normalny Rozkł.	i.n.nor. Rozkł.	Krzywe Pearsona
Sigma wewn. próbki=Rśr./d2			
<b>Dolna granica specyfik.</b>			
Specyfikacja nominalna			
Górna granica specyfik.	25,00000		
Dolny percentyl: ,135			
Mediana (50%): 50,000	9,12790	8,30054	8,30190
Górny percentyl: 99,865	22,64573	27,25440	27,37464
CP (zdolność potencjalna)			
CR (frakcja zdolności)			
<b>CPK (przedstaw. doskonałość)</b>	<b>1,17416</b>	<b>0,88106</b>	<b>0,87550</b>
CPL (CP, dolna)			
<b>CPU (CP, górna)</b>	<b>1,17416</b>	<b>0,88106</b>	<b>0,87550</b>
K (niewycentrowanie)			

wskazniki zdolności wyznaczone na podstawie:

- rozkładu normalnego
- dopasowania krzywymi Johnsona
- dopasowania krzywymi Pearsona



# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

**Analiza zdolności procesu: rozkład normalny i ogólny**

Zmienna: pomiar      Śred.: 9,12790  
Razem N: 100  
Próbki: 20      N próbek: 5  
UWAGA: Sigma-S wewn. próbki oszacowano

Zmienna << >> pomiar

Więcej, rozkład ogólny inny

Podsumowanie bieżącej zmiennej

Histogram podsumowujący

Rozkład licznosci ogólny inny

K-K rozkład ogólny inny

Liczba pomiarów poza specyfikacją (estymowana i obserwowana)

**Analiza zdolności procesu: rozkład normalny i ogólny inny: dane3 w wykład\_08.stw**

Zmienna: pomiar      Śred.: 9,12790  
Razem N: 100      Całkowita sigma procesu: 4,47953  
Próbki: 20      N próbek: 5      Sigma-S wewnątrzpróbkowa: 4,50594  
UWAGA: Sigma-S wewn. próbki oszacowano z rozstępu (R<sub>sr</sub>./d2)

Zmienna << >> pomiar

Więcej, rozkład ogólny inny

Podsumowanie bieżącej zmiennej

Histogram podsumowujący

Liczba pomiarów poza specyfikacją (estymowana i obserwowana)

Statystyki opisowe

Rozkład liczn. i dobroć dopasow.

*rozbieżność między obserwowaną a szacowaną liczbą pomiarów poza specyfikacją jest mniejsza przy założeniu, że rozkład nie jest normalny*

	Obserw.	Procent Obserw.	oczekiw.	Procent oczekiw.
Ponad USL:	1	1,000000	0,366775	0,366775
Pod LSL:				
<b>Razem</b>	<b>1</b>	<b>1,000000</b>	<b>0,366775</b>	<b>0,366775</b>

	Obserw.	Procent Obserw.	oczekiw.	Procent oczekiw.
Ponad USL:	1	1,000000	0,019761	0,019761
Pod LSL:				
<b>Razem</b>	<b>1</b>	<b>1,000000</b>	<b>0,019761</b>	<b>0,019761</b>

# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

**Specyfikacja dla karty X**

Zbiór << >> Ogół próbek (domyślny)

Linia centralna: Średnia procesu

Sigma: Obliczona

UCL:  $3.0000 * S$

LCL:  $-3.0000 * S$

Linie ostrzegawcze: brak

Jeżeli różne n: Użyj oddzielnych granic

Otwórz specyf. Zapisz specyf.

Linia średniej ruchomej:  Nie  Tak

**Zdolność procesu**  Testy konfigu

Opcje... Zapisz jako... Anu

Eksplojuj... Aktualizuj

Zabezpiecz

Grupami

**Specyfikacja analizy zdolności: dane3 w wyklad\_08.stw**

Typ specyfikacji: Nominalna ± delta

Nominalna: 5266

Dolna granica specyfikacji (LSL):

Góma granica specyfikacji (USL): 25

OK (oblicz) Ustaw i zamknij Anuluj

**Specyfikacja analizy zdolności: dane3 w wyklad\_08.stw**

Typ specyfikacji: Nominalna, góma

Nominalna: ± Delta:

Dolna granica specyfikacji (LSL):

Góma granica specyfikacji (USL): 25

OK (oblicz) Ustaw i zamknij Anuluj

**Dane: pomiar; Ogół próbek (domyśln...**

Wskaźnik zdolności	Wartość
Sigma wewn. próbki= $R\bar{s}/d2$	3,000 *Sigr
<b>Dolna granica specyfikacji</b>	
Wartość nominalna	
Góma granica specyfikacji	25,00000
CP potencjalna zdolność	
CR frakcja zdolności	1,17416
CPK wskaźnik wydajności	1,17416
CPL dolny wskaźnik zdolności	
CPU gómy wskaźnik zdolności	1,17416
K niewycentrowanie	

**Dane: pomiar; Ogół próbek (domyśln...**

Wskaźnik wykonania	Wartość
<b>Dolna granica specyfikacji</b>	
Wartość nominalna	
Góma granica specyfikacji	25,00000
PP (wskaźnik wykonania)	
PR (frakcja wykonania)	
PPK (przedst. dosk. wykonania)	1,18108
PPL dolny wskaźnik wykonania	
PPU gómy wskaźnik wykonania	1,18108

przy założeniu o normalności proces można uznać za **zdolny**

# STATISTICA – Ocena zdolności procesu

Xśr./R: pomiar: dane3 w ... ?

Karty | Specyf. X | Specyf. R/S  
Zbiory | Eksploracja | **Niegaus.** | Raport

Specyfikacja do obliczenia granic kontrolnych —  
Skóśność: \_\_\_\_\_  
 Obliczona z danych  
 Podana przez użytkownika: .96

Kurtoza: \_\_\_\_\_  
 Obliczona z danych  
 Podana przez użytkownika: .99

Karta X-średnie | Podsum. karty  
Odstające | Statystyki opisowe  
Histogram średnich

Zdolność procesu  
Histogram | Podsumowanie

UWAGA: Momenty obliczono z danych surowych, a nie ze średnich. Analiza zdolności dla rozkładu innego niż normalny jest także w module Analiza procesu.

Opcje... | Zapisz jako... | Anuluj  
Eksploruj... | Aktualizuj  
Zabezpiecz  
Grupami

Przyjmując, że rozkład cechy nie jest normalny, proces **nie może** być uznany za **zdolny**

Dane: pomiar; Ogół próbek (domyślny) (dane3 w wykład\_08.stw)...

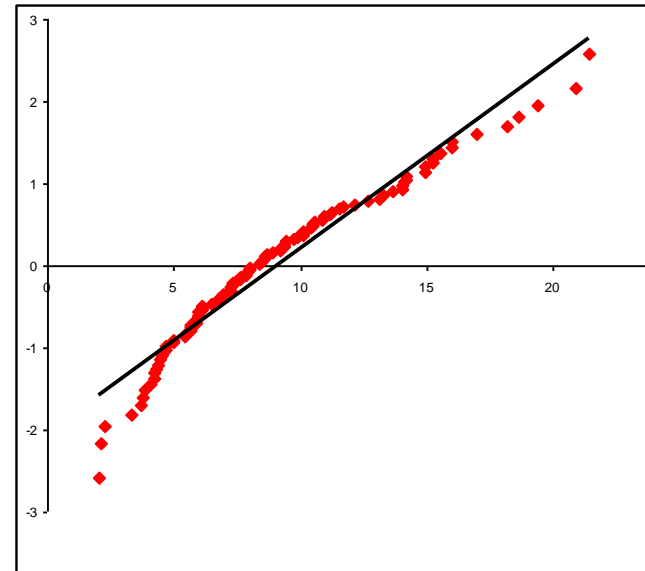
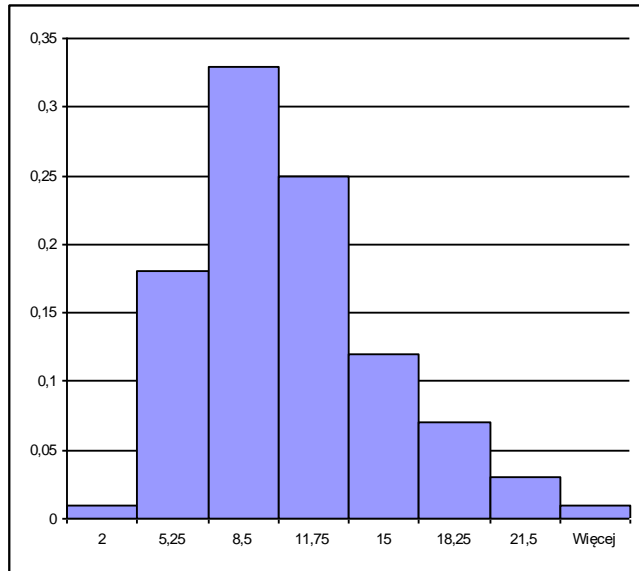
pomiar; Ogół próbek (domyślny) (dane3  
-3,000 \*Sigma= -4,38992  
3,000 \*Sigma= 22,64572

Wskaźnik zdolności	Normalny Rozkład	Niegaus. Rozkład	Krzywe Pearsona
Sigma wewn. próbki=Rśr./d2			
<b>Dolna granica specyfikacji</b>			
Wartość nominalna			
Górna granica specyfikacji	25,00000		
Dolny percentyl: 0,1350			
Mediana: 50,0000	9,12790	8,30054	8,30190
Górny percentyl: 99,8650	22,64572	27,25440	27,37463
CP potencjalna zdolność			
CR frakcja zdolności			
CPK wskaźnik wydajności	1,17416	0,88106	0,87550
CPL dolny wskaźnik zdolności			
CPU górny wskaźnik zdolność	1,17416	0,88106	0,87550
K niewycentrowanie			

# Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

## Przykład 5. cd.

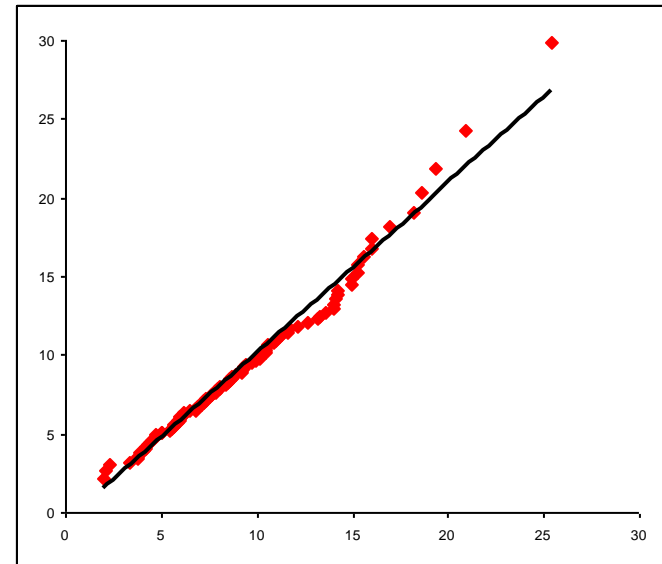
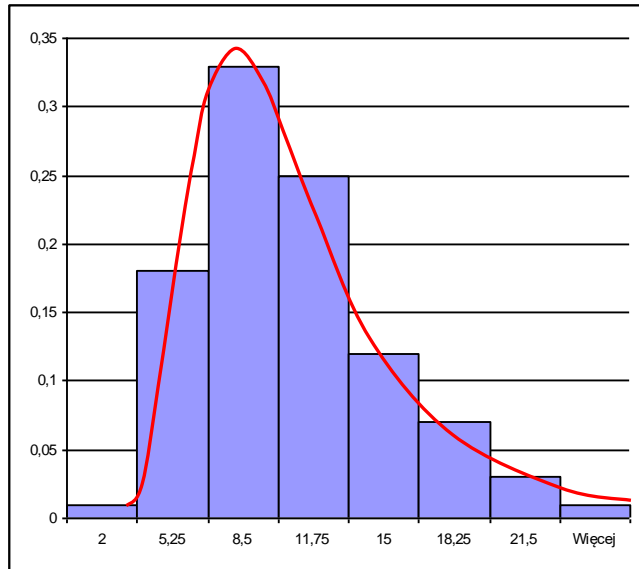
Histogram i wykres Q–Q wskazują, że dane nie mają rozkładu normalnego.



Dotychczasowa analiza (karta i współczynniki  $\hat{C}_{pu}$  i  $\hat{P}_{pu}$ ) była oparta na założeniu, że rozkład danych jest rozkładem normalnym. Wnioski dotyczące stabilności i zdolności procesu były więc niewłaściwe, wyznaczone wskaźniki sugerowały zbyt małą liczbę elementów niezgodnych.

# Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

**Przykład 5. cd.** Dopasowując rozkłady teoretyczne do danych najlepsze dopasowanie otrzymano dla *r. logarytmiczno – normalnego* o parametrach:  $\mu = 2,0908$  i  $\sigma = 0,5071$ .



Wykorzystując znaleziony rozkład obliczono:

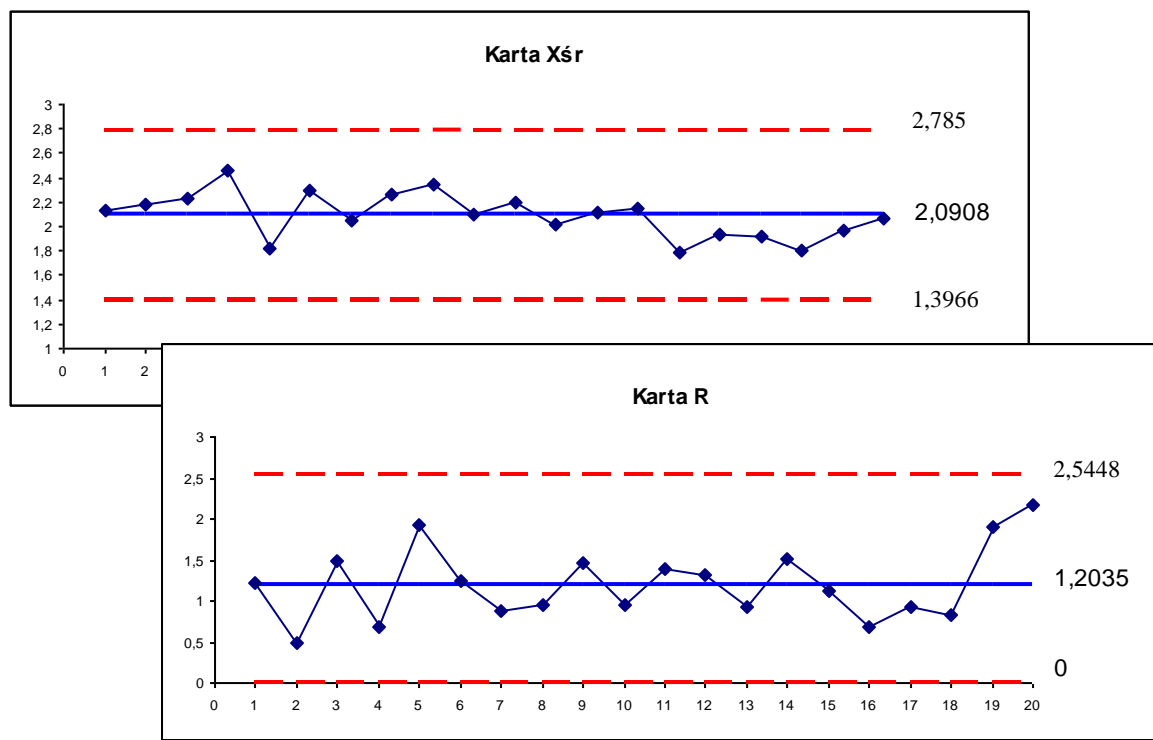
$$C_{pu}(q) = \frac{USL - q_{0,5}}{q_{0,99865} - q_{0,5}} = \frac{25 - 8,0917}{38,2084 - 8,0917} \approx 0,5839$$

$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{LN}(\mu, \sigma)}(USL) \approx 0,0131$$

Otrzymana wartość wskaźnika  $\hat{C}_{pu}$  wskazuje, że proces *nie jest zdolny* a *szacowana wadliwość ma wartość zbliżoną do obserwowanej* co potwierdza poprawność analizy.

# Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

**Przykład 5.** Identyczne wyniki daje analiza przeprowadzona na danych przekształconych do rozkładu normalnego (np. z wykorzystaniem transformacji Boxa-Coxa). W rozważanym przypadku wystarczy dane przekształcić wykorzystując transformację logarymiczną.



nr	1	2	3	4	5
1	1,99	1,81	1,82	3,04	1,98
2	1,99	2,15	2,35	1,98	2,46
3	2,15	2,42	2,70	1,21	2,70
4	2,57	2,08	2,77	2,24	2,65
5	2,61	2,35	0,69	1,48	1,93
6	2,23	1,73	2,36	2,16	2,96
7	1,71	2,12	1,73	2,14	2,59
8	2,22	2,65	1,77	2,72	1,93
9	2,01	3,24	2,06	1,77	2,65
10	1,79	2,29	2,64	2,07	1,70
11	2,74	2,39	1,44	2,83	1,54
12	1,46	2,77	2,31	1,50	2,03
13	2,40	1,91	2,42	2,35	1,51
14	2,03	2,92	2,16	2,22	1,41
15	1,32	1,31	1,53	2,45	2,32
16	1,92	1,60	1,78	2,08	2,28
17	1,79	1,60	2,54	1,81	1,87
18	1,44	2,06	1,96	2,19	1,35
19	0,83	2,73	1,74	2,31	2,24
20	2,50	0,73	2,64	1,54	2,90

Karta  $\bar{X} - R$  pokazuje, że proces jest statystycznie *stabilny*.

# Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

**Przykład 5. cd.** Górna granica specyfikacji po przekształceniu logarytmicznym wynosi  $USL = 3,2189$ , wartości współczynników  $\hat{C}_{pu}$  i  $\hat{P}_{pu}$  wynoszą:

$$\hat{\sigma}_{within} = \frac{\bar{R}}{d_2(5)} = \frac{1,2035}{2,326} \approx 0,5174$$

$$\hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{within}} = \frac{3,2189 - 2,0908}{3 \cdot 0,5174} \approx 0,7267$$

$$\hat{\sigma}_{overall} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \approx 0,5071$$

$$\hat{P}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{overall}} = \frac{3,2189 - 2,0908}{3 \cdot 0,5071} \approx 0,7414$$

Wadliwość oszacowana przy założeniu, że rozkład danych (po przekształceniu) jest rozkładem normalnym o  $\sigma = \hat{\sigma}_{within}$  i  $\sigma = \hat{\sigma}_{overall}$  wynosi:

$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu, \sigma_{within})}(USL) = 1 - \Phi\left(\frac{3,2189 - 2,0908}{0,5174}\right) \approx 0,0146$$

$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu, \sigma_{overall})}(USL) = 1 - \Phi\left(\frac{3,2189 - 2,0908}{0,5071}\right) \approx 0,0131$$

Wadliwość szacowana i obserwowana ( $p = 0,01$ ) są zbliżone, co potwierdza poprawność analizy – proces **nie może** być uznany za **zdolny** ponieważ wartości **wskaźników zdolności i wykonania** są  $< 1$ .

Wykorzystując zależność:

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

$C_{pk}$  można zapisać jako:

$$\begin{aligned} C_{pk} &= \min\{C_{pu}, C_{pl}\} = \frac{1}{2}(C_{pu} + C_{pl} - |C_{pu} - C_{pl}|) = \frac{1}{2}\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma} + \frac{\mu - LSL}{3\sigma} - \left|\frac{USL - \mu}{3\sigma} - \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right|\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3\sigma} (USL - LSL - |USL + LSL - 2\mu|) = \frac{1}{6\sigma} \left(USL - LSL - 2 \left|\frac{USL + LSL}{2} - \mu\right|\right) \end{aligned}$$

Przyjmując, że:  $T = \frac{USL + LSL}{2}$ , otrzymuje się:

$$C_{pk} = \frac{1}{6\sigma} (USL - LSL - 2|T - \mu|) = \frac{USL - LSL}{6\sigma} - \frac{2|T - \mu|}{6\sigma} = C_p - \frac{2|T - \mu|}{6\sigma}$$

Ostatecznie

$$C_{pk} = C_p - \frac{2|T - \mu|}{6\sigma} \quad \text{lub} \quad C_p - C_{pk} = \frac{2|T - \mu|}{6\sigma}$$





# Współczynnik niewycentrowania

Wcześniej pokazano, że:

$$C_{pk} = C_p - \frac{2|T-\mu|}{6\sigma}$$

Wyznaczając zakres zmienności  $6\sigma$  z definicji wskaźnika  $C_p$  ( $C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma}$ )

$$6\sigma = \frac{USL-LSL}{C_p}$$

Wskaźnik  $C_{pk}$  można zapisać jako:

$$C_{pk} = C_p - \frac{2|T-\mu|}{USL-LSL} C_p = C_p \left( 1 - \underbrace{\frac{2|T-\mu|}{USL-LSL}}_K \right)$$

$$C_{pk} = C_p(1 - K)$$

*K – współczynnik niewycentrowania*

$$K = \frac{|T-\mu|}{\frac{1}{2}(USL-LSL)}$$

$\tau^2$  odpowiada średniemu kwadratowi odchylenia od wartości nominalnej  $T$

czyli:

$$\begin{aligned}\tau^2 &= E((x - T)^2) \\ &= E((x - \mu + \mu - T)^2) \\ &= E((x - \mu)^2 + 2(x - \mu)(\mu - T) + (\mu - T)^2) \\ &= \underbrace{E((x - \mu)^2)}_{\sigma^2} + \underbrace{E((\mu - T)^2)}_{(\mu - T)^2} + \underbrace{E(2(x - \mu)(\mu - T))}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(2(x - \mu)(\mu - T)) &= 2(\mu - T)E(x - \mu) \\ &= 2(\mu - T)(E(x) - \mu) \\ &= 2(\mu - T)(\mu - \mu) \\ &= 0\end{aligned}$$