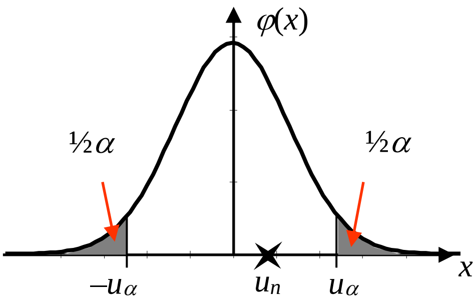
SPC – STATYSTYCZNE STEROWANIE PROCESAMI PRODUKCJI

1.1.5. Karty kontrolne – skuteczność

Idea karty kontrolnej jest podobna do idei testu statystycznego. Rozważmy kartę $\overline{X}$, na którą nanoszone są średnie z kolejnych próbek. Zakładając, że karta została wcześniej skonfigurowana, tzn. wyznaczone zostały średnia procesu μ_0, jego odchylenie standardowe σ oraz położenia linii kontrolnych to analiza próbki na karcie sprowadza się do przeprowadzenia testu istotności dla wartości średniej w tej próbce.

Stawiana jest hipoteza zerowa, że średnia w *k*–tej próbce nie uległa zmianie H_0: $\bar{x}_k = \mu_0$ wobec hipotezy alternatywnej że różnica średnich jest istotna H_1: $\bar{x}_k \neq \mu_0$. Do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest unormowana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0,\ 1)$ $u_n = \dfrac{\bar{x}_k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. Hipoteza zerowa jest odrzucana gdy średnia z próbki znajdzie się w obszarze krytycznym wyznaczonym na podstawie przyjętego *poziomu istotności* α $\left(u_\alpha = -\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$.



Linie kontrolne *UCL* i *LCL* wyznaczane są zwykle w odległości trzech odchyleń standardowych od linii centralnej, tzn. $u_\alpha = 3$, co odpowiada poziomowi istotności $\alpha = 0.0027$. Zakładając występowanie wyłącznie losowych przyczyn zmienności próbek, oznacza to, że 99.73% próbek powinno znaleźć się pomiędzy liniami kontrolnymi, a tylko 0.27% poza nimi. Losowe przyczyny zmienności powodują więc, że 0.27% próbek wypada poza linie kontrolne. Oznacza to, że karta kontrolna sygnalizuje nieistniejący problem w 1 na 370 próbek $(1/370 = 0.0027)$.

Poziom istotności α jest nazywany również prawdopodobieństwem popełnienia ***błędu I rodzaju***. Błąd ten polega na odrzuceniu hipotezy zerowej w sytuacji gdy jest ona prawdziwa. Przy testowaniu hipotez można również popełnić ***błąd II rodzaju***. Błąd ten polega na nieodrzuceniu hipotezy zerowej, która jest w rzeczywistości fałszywa. Prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju* oznaczane jest jako β.

Hipoteza zerowa (w rzeczywistości)	**Decyzja**	
	nie odrzucać H_0	**odrzucić H_0**
prawdziwa	*decyzja poprawna*	*błąd I rodzaju*
fałszywa	*błąd II rodzaju*	*decyzja poprawna*

W statystycznej kontroli jakości błąd I rodzaju jest nazywany ***ryzykiem producenta***. Ryzyko to związane jest z kosztem poszukiwania przyczyny nieistniejącego problemu. Wprowadzona ewentualnie korekta nie zmieni dalszej analizy procesu, błąd ten nie jest więc niebezpieczny.

Poważniejszy w skutkach jest błąd II rodzaju polegający na przeoczeniu niestabilności procesu. Prawdopodobieństwo wystąpienia tego błędu β oznacza, że karta kontrolna nie jest w stanie wykryć znaczącej zmiany procesu bezpośrednio po jej wystąpieniu. Prawdopodobieństwo $(1-\beta)$ określające szanse na wykrycie znaczącej zmiany bezpośrednio po jej wystąpieniu jest nazywane *mocą testu*. W statystycznej kontroli jakości błąd II rodzaju jest nazywany ***ryzykiem odbiorcy***.

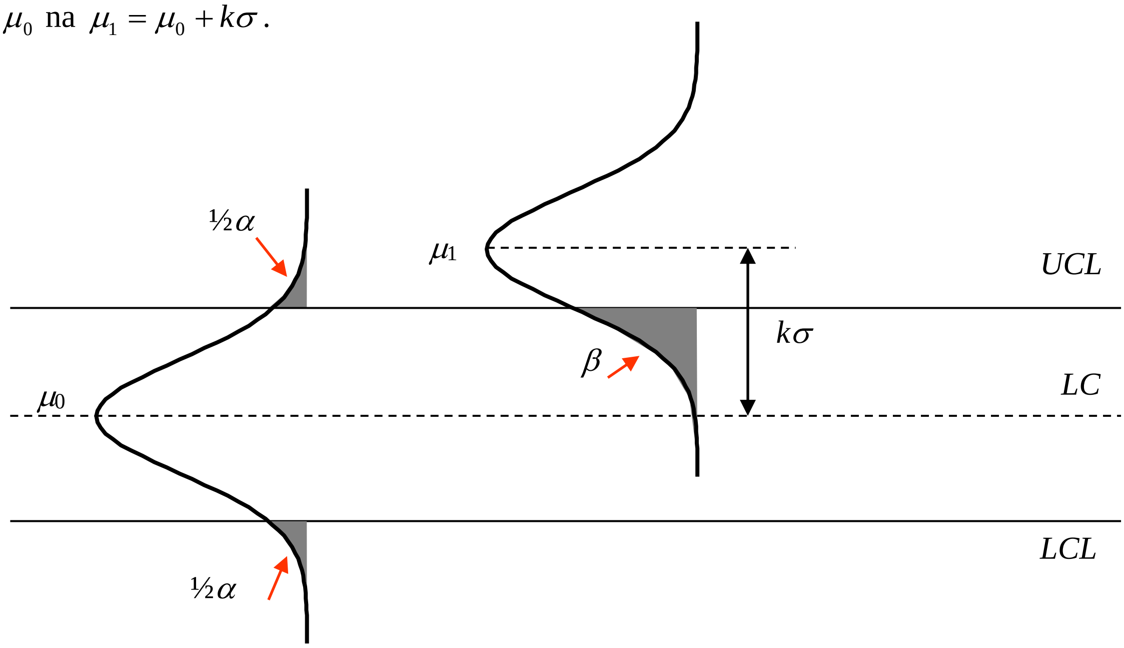
Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu II rodzaju można obliczyć. Poniżej zostanie przedstawiona analiza dla karty $\overline{X}$ przy założeniu, że istotną zmianę procesu sygnalizuje przekroczenie linii kontrolnej (nie są sprawdzane specjalne układy punktów które również świadczą o nielosowych zmianach procesu).

Załóżmy, że dla procesu stabilnego została zaprojektowana została karta $\overline{X}$ o parametrach:

$$LC = \mu_0, \quad UCL = \mu_0 + L\sigma/\sqrt{n}, \quad LCL = \mu_0 - L\sigma/\sqrt{n},$$

gdzie: μ_0, σ to średnia i odchylenie standardowe cechy obliczone dla procesu stabilnego, n to rozmiar próbki, L jest odległością granic kontrolnych od linii środkowej wyrażoną w jednostkach odchyleń standardowych, zwykle przyjmuje się $L = 3$.

Przyjmijmy, że analizowany na karcie proces uległ przesunięciu, tzn. średnia procesu zmieniła swoją wartość z μ_0 na $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$.



Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu II rodzaju wynosi więc:

$$\beta = P(LCL \le \bar{x} \le UCL) = P(\bar{x} \le UCL) - P(\bar{x} \le LCL) =$$

$$= F_{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma/\sqrt{n})}(UCL) - F_{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma/\sqrt{n})}(LCL) = \Phi\left(\frac{UCL-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{LCL-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0 + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0 - k\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0 - k\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(L - k\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-L - k\sqrt{n}\right).$$

Przykład 1.

Porównaj wielkości błędu II rodzaju dla karty $\overline{X}$ budowanej dla $n = 4, 5, 6, 9$ próbek przy założeniu, że proces uległ przesunięciu o $k = 1$.

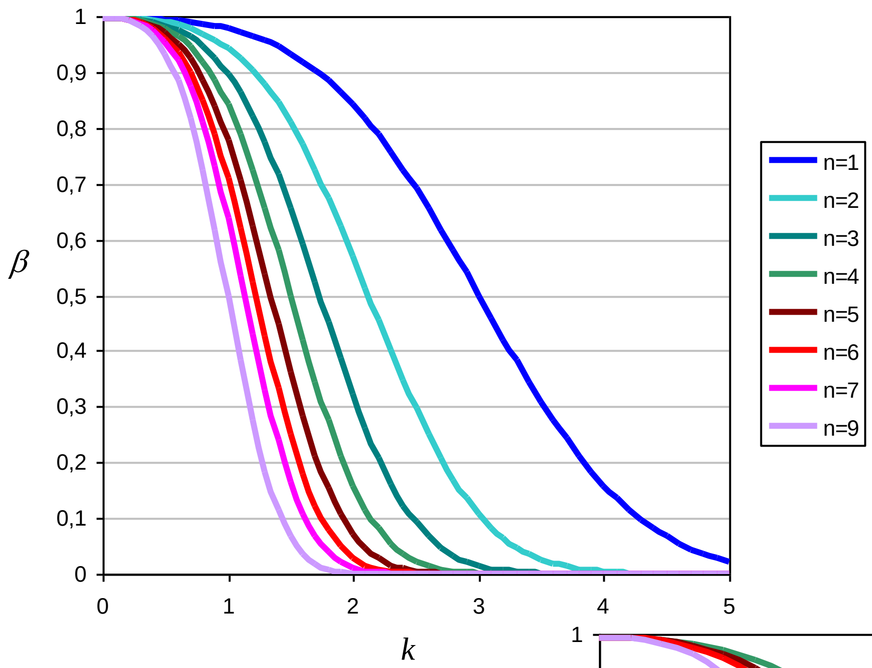
$$\beta_{(n=4)} = \Phi\left(3-\sqrt{4}\right) - \Phi\left(-3-\sqrt{4}\right) = \Phi(1) - \Phi(-5) \approx 0.8413,$$

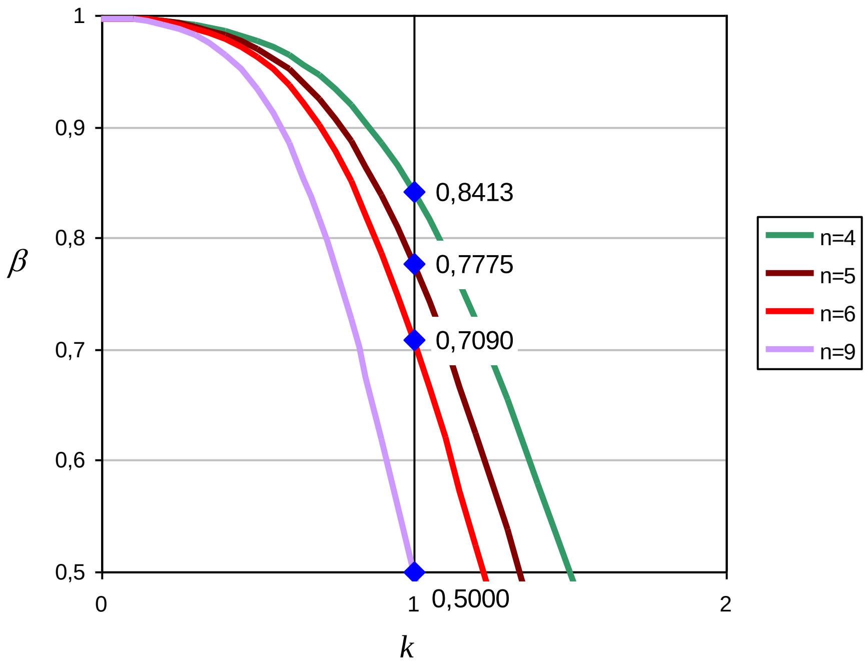
$$\beta_{(n=5)} = \Phi\left(3-\sqrt{5}\right) - \Phi\left(-3-\sqrt{5}\right) \approx 0.7775,$$

$$\beta_{(n=6)} = \Phi\left(3-\sqrt{6}\right) - \Phi\left(-3-\sqrt{6}\right) \approx 0.709,$$

$$\beta_{(n=9)} = \Phi\left(3-\sqrt{9}\right) - \Phi\left(-3-\sqrt{9}\right) = \Phi(0) - \Phi(-6) = 0.5.$$

W przypadku karty $\overline{X}$ zależność błędu II rodzaju od wielkości przesunięcia procesu jest przedstawiana za pomocą *krzywych operacyjno charakterystycznych* OC (ang. *operating characteristic curve*) wykreślanych dla różnych rozmiarów próbek.





Przedstawione powyżej przykład i wykresy OC pozwalają na wyciągnięcie wniosku opisującego wpływ rozmiaru próbki na wielkość błędu II rodzaju: zwiększanie rozmiaru próbki prowadzi do zmniejszania błędu II rodzaju. Wielkość próbek i częstotliwości ich pobierania wpływa na szybkość wykrywania zmian które mogą prowadzić do obniżania jakości produkcji. Im większe próbki i większa częstotliwość ich pobierania tym szybciej można wykryć nieprawidłowości. Ale z drugiej strony zwiększanie liczby kontroli pociąga za sobą dodatkowe koszty. Ustalenie rozmiaru i częstotliwości pobierania próbek wymaga kompromisu pomiędzy kosztami kontroli a ryzykiem że część wyprodukowanych wyrobów nie będzie spełniać wymogów specyfikacji.

Prawdopodobieństwa wystąpienia błędów I i II rodzaju pozwalają na wyznaczenie wskaźników *ARL*, definiujących średnie długości serii (*ang. average run length*) albo inaczej średnią liczbę próbek po których wystąpi sygnał o przekroczeniu linii kontrolnej.

Wskaźnik ARL_0 jest średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie uregulowany wygeneruje odstającą próbkę.

Wskaźnik ARL_1 jest średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie rozregulowany wygeneruje odstającą próbkę.

Wskaźnik ARL_0

Wyznaczmy średnią liczbą próbek do momentu pojawienia się sygnału o rozregulowaniu dla procesu statystycznie uregulowanego. Niech l oznacza numer pierwszej odstającej próbki.

Prawdopodobieństwo, że $l = 1$, tzn. że pierwsza próbka przekroczy linię kontrolną jest równe prawdopodobieństwu wystąpienia błędu I rodzaju, tzn. α.

Prawdopodobieństwo, że $l = 2$, tzn. że pierwsza próbka znajdzie się w granicach wyznaczonych przez linie kontrolne a druga próbka wypadnie poza granicami wynosi $(1-\alpha)\alpha$.

Prawdopodobieństwo, że $l = 3$, tzn. że pierwsze dwie próbki znajdą się w granicach a trzecia próbka wypadnie poza granicami wynosi $(1-\alpha)^2\alpha$.

Zmienna l ma rozkład geometryczny, prawdopodobieństwo że *k*–ta próbka da pierwszy sygnał o rozregulowaniu procesu wynosi:

$$P(l = k) = (1-\alpha)^{k-1}\alpha .$$

Średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie uregulowany wygeneruje odstającą próbkę wyznacza się wykorzystując wartość oczekiwaną rozkładu geometrycznego:

$$E(l) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P(l = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(1-\alpha)^{k-1}\alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

Ostatecznie więc wskaźnik ARL_0 wynosi:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

Przykład 2.

Wyznacz wartość wskaźnika ARL_0 dla karty $\overline{X}$ o liniach kontrolnych znajdujących się w odległości trzech odchyleń standardowych od linii centralnej.

Prawdopodobieństwo wystąpienia sygnału o rozregulowaniu wynosi w tym przypadku:

$$\alpha = 0.0027,$$

średnia liczba próbek po której pojawi się próbka odstająca wyniesie więc:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \approx 370.$$

Wskaźnik ARL_1

Podobne rozważania jak te przeprowadzone powyżej pozwalają na wyznaczenie wartości wskaźnika ARL_1. Niech l oznacza numer pierwszej odstającej próbki.

Prawdopodobieństwo, że pierwsza próbka nie przekroczy linii kontrolnej jest równe prawdopodobieństwu wystąpienia błędu II rodzaju, tzn. β. Prawdopodobieństwo, że $l = 1$, tzn. że pierwsza próbka przekroczy linie kontrolne wynosi więc $(1-\beta)$.

Prawdopodobieństwo, że $l = 2$, tzn. że pierwsza próbka znajdzie się w granicach wyznaczonych przez linie kontrolne a druga próbka wypadnie poza granicami wynosi $\beta(1-\beta)$.

Prawdopodobieństwo, że $l = 3$, tzn. że pierwsze dwie próbki znajdą się w granicach a trzecia próbka wypadnie poza granicami wynosi $\beta^2(1-\beta)$.

Zmienna l ma rozkład geometryczny, prawdopodobieństwo że *k*–ta próbka da pierwszy sygnał o rozregulowaniu procesu wynosi:

$$P(l = k) = \beta^{k-1}(1-\beta).$$

Wartość wskaźnika ARL_1 wyznacza się w oparciu o wartość oczekiwaną rozkładu geometrycznego, wynosi ona w tym przypadku:

$$E(l) = \frac{1}{1-\beta},$$

Wskaźnik ARL_1 wynosi więc:

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}.$$

Przykład 3.

Porównaj dla karty $\overline{X}$ z przykładu 1. średnie liczby próbek po których pojawia się próbka odstająca przy założeniu, że proces uległ przesunięciu o jedno odchylenie standardowe.

n	ARL_1
4	$ARL_1 = \dfrac{1}{1-0.8413} \approx 6.3012$
5	$ARL_1 = \dfrac{1}{1-0.7775} \approx 4.4944$
6	$ARL_1 = \dfrac{1}{1-0.7090} \approx 3.4364$
9	$ARL_1 = \dfrac{1}{1-0.5} = 2$